数理解析研究所講究録
第 237 巻 1975 年 83-87

孤立特異点の無限小変形について.

京大 数理研 藤木明

(X,p)を孤立特異点とする。(X,p)の変形に関し次の定理が基本的である。

定理(i). (X,p)の versal deformation が存在する。 さらに

(ii) $Ext^2_{O_X}(\Omega^1_X, O_X)_p = 0$ ならば; deformation の parameter space S は nonsingular。この時 $\dim S = \dim Ext^1(\Omega^1_X, O_X)$。

この定理は Grauert[2] による。(ii)の特殊な仮定のもとでは Tjurina によって証明されていた。[7]。

しかし一般に(ii)の条件をチェックすることは, (X,p) が complete intersection の場合を除き著しく困難である。本稿では (X,p) の変形を, $X-p$の変形と infinitesimal に比較することにより, (ii)の条件をみたす例を与える。 以下(X,p)は normal。

§1. 考えを fix するため, X は $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^N(z_1,\cdots,z_N)$ の polydisc $D = \{\sum_{i=1}^N |z_i|^2 < 1\}$ の analytic subset, $p = \mathbb{C}^N$の原点とする。

$U = X - p$, $W = D - p$ とおく。

<u>命題 1.</u> i) $^\exists j_1 : \mathcal{E}xt^1(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^1(U, \Theta_U)$ 自然な包含写像. さらにもし depth$_p X \geqq 3$ ならば j_1 は bijective.

ii) $^\exists j_2 : \mathcal{E}xt^2(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^1(U, N_{U/W})$, 自然な包含写像.. さらに depth$_p X \geqq 3$ ならば j_2 は bijective。

iii) j_1 は (X, p) の変形から生ずる infinitesimal deformation map と可換. もっと正確に言うと, $f : (\mathcal{X}, p) \longrightarrow (S, 0)$ を (X, p) の任意の deformation とする。 $U_\delta = \{ x \in X \mid \delta < \Sigma |z_i|^2 < 1 \}$ とおく時, f は U_δ の deformation を誘導する。 これを $f_0 : \mathcal{U} \longrightarrow (S, 0)$ とする。 f, f_0 に対しては infinitesimal deformation map $\rho : T \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X)$ $\rho_0 : T \longrightarrow H^1(U_\delta, \Theta_U)$ が各々定義される。 $U_\delta \overset{i}{\hookrightarrow} U$ inclusion に対し $i^* : H^1(U, \Theta_U) \rightarrow H^1(U_\delta, \Theta_U)$ は Andreotti-Grauert により injective. ($\dim X \geqq 3$ なら bijective, trivial case $\dim X = 1$ は除外している), すると iii) は $i^* j_1 \rho = \rho_0$ を意味する。 なお T は S の 0 における Zariski 接空間。

上の命題の幾何学的な意味づけとして.

<u>命題 2.</u> depth$_p X \geqq 3$ とする。 $f_0 : (\mathcal{U}, U_\delta) \longrightarrow (S, 0)$ を U_δ の任意の deformation とする時, f_0 は isolated singularity (X, p) の変形から上のようにして得られる。ただし. S : nonsingular.

S が一点よりなる時. これは Rossi の結果 [6] である。 Relative case は Ling. Siu, Ramis et Ruget らにより. 結果が得られている. 命題 2 は Ling. Thm (I)$_n$ [5] よりの結論である。

さて $\sigma:(\tilde{X},A)\to(X,p)$ を (X,p) の resolution とする。次の事実に、まず注意する。

<u>定理3.</u> 次の条件は同値。

(i). $\mathrm{depth}_p X \geq k$

(ii) $R^i\sigma_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}=0$, $1\leqq i\leqq k-2$。

これは Grauert-Riemenschneider の消滅定理[3]及び Serre duality より導かれる。

$(\tilde{X},A)$ と (X,p) の変形に関する一つの関係が次により与えられる。

<u>命題4.</u> $\tilde{f}:(\tilde{\mathcal{X}},A)\longrightarrow(S,0)$ を $(\tilde{X},A)$ の任意の deformation とする。もし $\mathrm{depth}_p X\geq 3$ ならば $\tilde{f}$ の equiblowing down により (X,p) の変形が得られる。i.e. $\exists f:(\mathcal{X},p)\longrightarrow(S,0)$, (X,p) の変形, $\exists\tilde{\sigma}:(\tilde{\mathcal{X}},A)\to(\mathcal{X},p)$ proper bimeromorphic morphism. s.t. $\tilde{\sigma}|\tilde{X}=\sigma$. で, $\tilde{f}=f\cdot\tilde{\sigma}$ が成立する。

命題1と命題4に対応して

<u>命題5.</u> 命題4の状況で, $\exists\mu: H^1(\tilde{X},\Theta_{\tilde{X}})\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_X,\mathcal{O}_X)_p$ 自然写像; かつ $\tilde{\rho}:T\longrightarrow H^1(\tilde{X},\Theta_{\tilde{X}})$, $\rho:T\longrightarrow\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_X,\mathcal{O}_X)$ を夫々 $\tilde{f}, f$ に対する無限小変換写像とする時, $\mu\cdot\tilde{\rho}=\rho$.

(注). 命題4, 5は $R^1\sigma_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}=0$ の仮定のもとで一般に成立する。定理3により特に $\mathrm{depth}_p X\geqq 3$ のもとでもよい。

§2. 特殊な孤立特異点の族を調べる。 (X, p): 孤立特異点が curveにより解消できるとは $\exists h: (\tilde{X}_0, A_0) \longrightarrow (X, p)$ 特異点の解消 s.t. $\dim A_0 = 1$ のこととする。

命題6. (X, p)をcurveにより解消できる孤立特異点とし、$\operatorname{depth}_p X \geqq 3$ を仮定する。この時

i) (X, p) は Cohen-Macaulay

ii). $f: (\tilde{X}, A) \to (X, p)$ を (X, p) の勝手な 解消で $\dim A = 1$ とものとする時、次が成立: Aの各既約成分 A_i は $\mathbb{P}^1$ に同型, A は cycleを含まぬ。かつ $A_i \hookrightarrow \tilde{X}$ は例外的埋め込み (Grauertの意味で)。

命題1(ii)の簡単な応用として.

定理7. (X, p) を命題6の如くとする時. もし $\dim X \geqq 4$ なら, $\mathcal{E}xt^2(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X) = 0$, 従って 別項、Tjurinaの定理により versal 変形は非特異。さらに $\dim \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X) = \dim H^1(\tilde{X}, \Theta_{\tilde{X}})$ が成立する。

注意8 (i). $\dim X \neq 3$ では命題6の(X, p)は完全交叉ではない。 $\dim X = 3$ では完全交叉(complete intersection)の例はある。例えば Brieskorn [1] 参照。

(ii). (X, p) を命題6の如くとする時に、(X, p)が Gorenstein $\Longleftrightarrow$ $\dim X = 3$ かつ $N_{A_i/\tilde{X}} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}_{A_i}(-2)$, $\forall i$。もちろん上の Brieskorn の例ではこれは満たされる。(i)の事実はこのことから、また

は「$(X,p) \neq$ U.F.D. if $\dim X \geq 4$」よりでる。

最後に、最も簡単な場合として $\exists\sigma:(\tilde{X},A)\to(X,p)$. resolution s.t. $A\cong \mathbb{P}^1$ の場合を考える。

命題8. (i) (X',p') を同様の, i.e. $\exists\sigma':(\tilde{X}',A')\to(X',p')$ with $A'\cong\mathbb{P}^1$ とすると, $(X,p)\simeq(X',p') \Longleftrightarrow (\tilde{X},A)\simeq(\tilde{X}',A')$.

(ii). $A\hookrightarrow \tilde{X}$ なる埋めこみは、$\mathbb{C}^m$ を fibre とし、A を底とするある特殊な fibre bundle $\phi: Z\to A$ の 'zero' section, $\iota: A\to Z$, としての埋めこみに同値。

・構造群は例えば $\mathbb{C}^2=\mathbb{C}^2(x,y)$ の時には、$(x,y)\mapsto(ax+f(y), by)$ $a,b\in\mathbb{C}^*$, $f(y)$: y の正則有理函数のような形を持つ。一般の場合にも manifold Z の explicit な記述が可能であるがここでは省略する。このような type の bundle は Jarobbino[4] によっても異る context から得られていることに注意したい。

文　献

[1]. Brieskorn, E., Über die Auflösung gewisser Singularitäten von hol. Abb. Math. Ann. 166 (1966)

[2] Grauert, H., Über die Deformation isolierten Singularitäten ---, Invent. Math. 15 (1972)

[3] Grauert, H., u. Riemenschneider, O., Verschwindungssätze für ---. Invent. Math. 11. (1970)

[4] Jarobbino, A., An alg. fibre bundle over $\mathbb{P}^1$ that is not a v.b. Topology. 12. (1973)

[5] Ling, H.-S. Extending families of pseudoconcave complex spaces, Math. Ann. 204. (1973)

[6] Rossi, H., Attaching analytic spaces ---, Proc. Conf. Complex Analysis, Minneapolis. (1964)

[7] Tjurina, Locally semiuniversal deformations of isol. sing. --- Math. of Izv. 3. (1969)