数理解析研究所講究録
第239巻 1975年 124-134

ある種の擬微分作用素の parametrix の構成

北大　理学部　　山本和広

§1．序

多様体Xをパラコンパクトかつ次元 n とする。$P(x,D)$ をX上の type 1,0 の properly supported 擬微分作用素とし，その主表象 $p_m(x,\xi)$ は $C^\infty(T^*(X)\setminus 0)$ の元で m 次の正斉次函数とする。Pの特性集合を

$$\Sigma=\{(x,\xi)\in T^*(X)\setminus 0\ ;\ p_m(x,\xi)=0\}$$

$f,g\in C^\infty(T^*(X)\setminus 0)$ の Poisson bracket を $\{f,g\}$ と書く。今 p_m の実部と虚部をそれぞれ $g_1(x,\xi)$, $g_2(x,\xi)$ とし，任意の数列 $I=(i_1,\cdots,i_s)$ ($i_j=1$ or 2) に対して次の函数を対応させる。

$$C_I(x,\xi)=\{g_{i_1},\{g_{i_2},\{\cdots,\{g_{i_s},g_1\}\cdots\}.$$

Iの長さを $|I|$ $(=s)$ と書いて Σ 上の函数 $k(x,\xi)$ を次のようにして定義する。任意の $(x,\xi)\in\Sigma$ $C_{I_0}(x,\xi)\neq 0$ かつ $|I|<|I_0|$ なるすべてのIについて $C_I(x,\xi)=0$ の時 $k(x,\xi)=|I_0|$ とする。

〈仮定〉

i) Σ は $T^*(X)\setminus 0$ の closed conic 部分多様体でかつ余次元 2 とする。

ii) $k(x,\xi)$ は Σ 上で局所的に定数であり $\sup_{\Sigma} k(x,\xi)=k_0<\infty$。

この仮定の意味は次節の命題で明らかとなるが，上を仮定すれば，次のような意味で $P(x,D)$ に対する parametrix を構成することが出来る。

(定理)

$P(x,D)\in L^m(X)$ かつ〈仮定〉 i) と ii) を満たす時，次の条件を満たす properly supported な線型作用素 $F, F^+, F^-; \mathcal{D}'(X)\longrightarrow \mathcal{D}'(X)$ が存在する。

i) $F:\ H^{loc}_s(X)\longrightarrow H^{loc}_{s+m-(k_0/k_0+1)}(X)$ conti.

$F^{\pm}:\ H^{loc}_s(X)\longrightarrow H^{loc}_s(X)$ conti. $^{\forall}s\in\mathbb{R}$

ii) $F^+ + FP\equiv I$, $F^- + PF\equiv I$

$(F^+)^*\equiv F^+$, $(F^-)^*\equiv F^-$

iii) $WF'(F)=\mathrm{diag}\,(T^*(X)\setminus 0)$, $WF'(F^{\pm})=\mathrm{diag}\,(\Sigma^{\pm})$

ここで $A\equiv B$ とは $A-B$ が C^∞ なる積分核を持っている事を示し，$\Sigma^{\pm}$ は次のような Σ の部分集合である。

$$\Sigma^{\pm}=\{(x,\xi)\in\Sigma\ ;\ k(x,\xi)=\mathrm{odd}\ \text{かつ}\ C_{I_1}(x,\xi)\gtrless 0\ \text{か}\ C_{I_2}(x,\xi)\gtrless 0\}$$

$I_1=(1,\cdots,1,2)$, $I_2=(2,\cdots,2)$ で $|I_j|=k(x,\xi)$。

(注意)

次節の命題で示すように，$k(x,\xi)$が奇数ならば$C_{I_1}(x,\xi)$か$C_{I_2}(x,\xi)$のいずれかは0でなくて，かつ共に消えなければ同符号を持つことがわかる。

上の定理は Duistermaat - Sjöstrand [1] の一般化である。彼らは$k(x,\xi)=1$の時を論じている。この場合は仮定 i) は自動的に満たされている。このような条件を満たす擬微分作用素の例としては，oblique derivative の問題を考える時の境界に帰着させた擬微分作用素はこの条件をみたしている。

§2. micro-local space での考察

〈仮定〉i) と ii) のもとで，斉次正準変換を$T^*(X)\setminus 0$から$T^*(R^n)\setminus 0$へ考えて，主表象$P_m(x,\xi)$を Mizohata 型の作用素に変換する。

(命題)

i) §1の〈仮定〉は次と同値である。

任意のΣの点(x_0,ξ_0)に対して，(x_0,ξ_0)の conic な近傍から$T^*(R^n)\setminus 0$の conic な開集合への斉次正準変換χがあって

$$(P_m\circ\chi^{-1})(x,\xi)=(\xi_n+i x_n^k\xi_{n-1})Q(x,\xi).$$

ここで$k=k(x_0,\xi_0)$．$Q(x,\xi)$は0でない$(m-1)$次の正斉次

函数である。

ii) i)の斉次正準変換χにおいて，kが奇数ならばξ_{n-1}の符号は$-C_{I_1}(x_0,\xi_0)$か$-C_{I_2}(x_0,\xi_0)$に等しい。ここで$C_{I_1}(x_0,\xi_0)\neq 0$か$C_{I_2}(x_0,\xi_0)\neq 0$であり，もし共に0でないならば符号は等しい。

この命題を証明する為には次の補題が有益である。この補題はSato, Kawai-Kashiwara [2] に解析函数としてCauchy-Kovalevskajaの定理を用いて証明してあるが，C^∞-函数の時は，実係数のCauchy問題としてまったく同様に示される。

（補題）

$P(x,\xi)$, $q(x,\xi)$を$C^\infty(T^*(X)\setminus 0)$の元とし，それぞれ1次，$1/k$次の正斉次函数とする。$\{P,q\}\gtrless 0$とした時に$-1/k(k+1)$次の正斉次函数$a(x,\xi)$が存在して，$\{P(x,\xi)=q(x,\xi)=0\}$のconicな近傍で$\{a^kP, aq\}=\pm 1$となる。

（命題の証明）

斉次正準変換があって$(P_m\circ\chi^{-1})(x,\xi)=(\xi_n+ix_n^k\xi_{n-1})Q(x,\xi)$と書ければ，Poisson bracketは正準変換で不変だから，＜仮定＞i), ii)をみたす事はほとんど容易である。従って＜仮

i), ii)のもとで χ の存在と ii) を証明する。仮定より $\rho=(x_0, \xi_0)$ の conic な近傍で $C_{I_0}(x,\xi)\neq 0$ なる I_0 ($|I_0|=k$) がある。今 $I_0=(1, I_0')$ ($|I_0'|=k-1$) とすると補題より $1/2-m$ 次と $1/2+k-(k+1)m$ 次なる0でない正斉次函数 $\alpha(x,\xi)$, $\beta(x,\xi)$ があって $\{\alpha q_1, \beta C_{I_0'}\}(x,\xi)=\pm 1$ を満たす。従って以下の χ_2 と同様に作られる斉次正準変換 χ_1 があって次の条件をみたす。$\Sigma_1=\{(x,\xi)\in T^*(X)\setminus 0\,;\, q_1=C_{I_0'}=0\}$ とすれば $\chi_1(\Sigma_1)\subset\{(x,\xi)\in T^*(\quad\setminus 0\,;\, x_n=\xi_n=0\}$ かつ $(P_m\circ\chi_1^{-1})(x,\xi)=(\xi_n+i\,q(x,\xi))A(x,\xi)$。ここで q は実1次正斉次函数, A は0でない $m-1$ 次の正斉次函数である。$\Sigma\subset\Sigma_1$ でたがいに余次元2の $T^*(X)\setminus 0$ の部分多様体だから $\chi_1(\Sigma)=\chi(\Sigma_1)$ が $\chi_1(\rho)$ の conic な近傍で成りたっている。$A(x,\xi)$ が real かつ $C_I(x,\xi)=0$ ($|I|<k$) より $\{\xi_n,\{\xi_n,\{\cdots,\{\xi_n, q\}\cdots\}(x',0,\xi',0)=\frac{\partial^j q}{\partial x_n^j}(x',0,\xi',0)=0$ ($j<k$)。q に taylor 展開を用いると $q(x,\xi)=x_n^k\, e(x,\xi)+\xi_n f(x,\xi)$ と書ける。$r_1=\xi_n$, $r_2=q(x,\xi)$ として, $\tilde{C}_I(x,\xi)=\{r_{i_1},\{r_{i_2},\{\cdots,\{r_{i_j},\xi_n\}\cdots\}$ と定義すれば

$$\tilde{C}_I(x,\xi)=-k!/(k-j+1)!\,x_n^{k-j}\,e f^{j_2-1}(x,\xi)+x_n^{k-j+1}g(x,\xi)+\xi_n h(x,\xi).$$

ここで $|I|=j\leq k$, j_2 は I の中 $i_l=2$ なるものの個数とする。従って $e(x,\xi)$ の符号は $-C_{I_1}(x,\xi)$ のそれに等しくかつ $C_{I_2}\neq 0$ (i.e. $f\neq 0$), k が奇数ならば C_{I_1} と C_{I_2} は

同符号である。以下簡単の為 $e(x,\xi)>0$ とする。$r(x,\xi)=\xi_n+x_n^k ef(1+f^2)^{-1}$, $s(x,\xi)=x_n(e(1+f^2)^{-1})^{1/k}$ とすれば，$\xi_n+if=(r(x,\xi)+is^k(x,\xi))(1+if)(x,\xi)$ かつ $\{r,s\}$ は正である。再び補題を用いれば $-1/k(k+1)$ 次の正斉次函数 $a(x,\xi)$ があって $\{a^k r, as\}=1$, $\chi_1(\rho)$ の conic 近傍で。従って $a^k r$ と as の Hamilton ベクトル場は交換可能だから正の 0 でない $1/k+1$ 次の斉次函数 $t(x,\xi)$ があって $\{a^k r,t\}=\{as,t\}=0$。

$$ta^k(r+is^k)=ta^k r+i(t^{-1}as)^k t^{k+1}$$

ここで $\{ta^k r, t^{-1}as\}=1$, $\{ta^k r, t^{k+1}\}=\{t^{-1}as, t^{k+1}\}=0$ 従って古典的な Hamilton-Jacobi の定理より斉次正準変換が存在して $(ta^k r)\circ\chi_2^{-1}=\xi_n$, $(t^{-1}as)\circ\chi_2^{-1}=x_n$, $t^{k+1}\circ\chi_2^{-1}=\xi_{n-1}$. 従って $\chi=\chi_2\circ\chi_1$ とおけば命題は示される。

§3 Parametrix の構成

（定義）

H_1, H_2 ; Hilbert 空間 , $\mathcal{L}(H_1,H_2)$; H_1 から H_2 への連続な線形写像全体。

i) $p(x,\xi)\in S^m(\mathbb{R}^{n-1};H_1,H_2)$

$\Longleftrightarrow$ i) $p(x,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1};\mathcal{L}(H_1,H_2))$

ii) 任意の $K\Subset\mathbb{R}^{n-1}$, 任意の multi-indices α,β に

対して定数 $C\ (=C_{\alpha,\beta,K})$ が存在して

$$\| D_{x'}^{\alpha} D_{\xi'}^{\beta} p(x',\xi') \|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} \le C(1+|\xi'|)^{m-|\beta|} \quad \forall (x',\xi') \in K \times \mathbb{R}^{n-1}$$

ii) $P(x',D') \in L^m(\mathbb{R}^{n-1};H_1,H_2)$ とは表象 $p(x',\xi') \in S^m(\mathbb{R}^{n-1};H_1,H_2)$ を用いて普通の積分形であらわされるベクトルに値を取る擬微分作用素.

iii) $H^{k}_{\xi'}(\mathbb{R})$ を次の norm によって定義されるヒルベルト空間.

$$\|u\|^2_{H^k_{\xi'}(\mathbb{R})} = \|(1+|\xi'|^{\frac{1}{k+1}} + |\xi'|\,x_n^k)u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|D_{x_n}u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

$l(x,\xi) \in S^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ とし，その主表象を $\xi_n + i x_n^k \varphi(\xi')$ とする。ここで $\varphi(\xi')$ は $\chi(\rho)$ の conic な近傍で ξ_{n-1} に等しい1次の正斉次函数とし，P の共役作用素を考えれば，$\varphi(\xi')$ は負としてよい。$l(x,\xi)$ より定義される vector-valued 擬微分作用素を $L(x',D')$，その表象を $L(x',\xi')$ と書くと，上の定義 i) の評価式において $\forall (x',\xi') \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$ で成り立っているように l の低い次数の項に制限を加えておく。更に k が奇数の時には補助作用素 $R^+(x',\xi')$ を考える。

$$R^+(x',\xi')u = (1+|\xi'|)^{\frac{1}{k+1}} A^{-1}(\xi') \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\varphi(\xi')\int_0^{y_n}\theta^k d\theta\right\} u(y_n)\,dy_n$$

ここで $A(\xi') = \| \exp \int_0^{x_n} \theta^k \varphi(\xi')\,d\theta \|_{L^2(\mathbb{R})}$.

（命題 3.1）

i) $\begin{pmatrix} L \\ \mathcal{R}^+ \end{pmatrix}(x', \xi') \in S^0(\mathbb{R}^{n-1}; H^{k}_{\xi'}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})\times \mathbb{C})$

ii) 次の条件を満たす properly supported な擬微分作用素 $(E(x', D'), E^+(x', D')) \in L^0(\mathbb{R}^{n-1}; L^2(\mathbb{R})\times\mathbb{C}, H^{k}_{\xi'}(\mathbb{R}))$ がある。

$$\begin{pmatrix} L \\ \mathcal{R}^+ \end{pmatrix}\circ(E, E^+)(x', D') \equiv I \mod L^{-\infty}(\mathbb{R}^{n-1}; L^2(\mathbb{R})\times\mathbb{C}, L^2(\mathbb{R})\times\mathbb{C})$$

$$(E, E^+)\circ\begin{pmatrix} L \\ \mathcal{R}^+ \end{pmatrix}(x', D') \equiv I \mod L^{-\infty}(\mathbb{R}^{n-1}; H^{k}_{\xi'}(\mathbb{R}), H^{k}_{\xi'}(\mathbb{R}))$$

ここで k が偶数の時には $\mathcal{R}^+(x', D') = E^+(x', D') = 0$ として考えない。

（証明）

$L^0(x', \xi')u(x_n) = D_{x_n}u + i x_n^k \varphi(\xi')u$ とすれば $\begin{pmatrix} L \\ \mathcal{R}^+ \end{pmatrix}(x', \xi')$ の主表象は $\begin{pmatrix} L^0 \\ \mathcal{R}^+ \end{pmatrix}(x', \xi')$ であるからこの作用素が逆作用素を持っていることを示せば、スカラーの場合の楕円型作用素と同様にして (E, E^+) が構成できる。

k が偶数

$$\widehat{E}(x', \xi')u(x_n) = i\int_{-\infty}^{x_n}\exp\left\{\varphi(\xi')\int_{y_n}^{x_n}\theta^k d\theta\right\}u(y_n)\,dy_n$$

k が奇数

$$\widehat{E}_0(x', \xi')u(x_n) = i\int_{0}^{x_n}\exp\left\{\varphi(\xi')\int_{y_n}^{x_n}\theta^k d\theta\right\}u(y_n)\,dy_n$$

$$(\widetilde{E}^+(x', \xi')z)(x_n) = (1+|\xi'|)^{-\frac{1}{k+1}}A^{-1}(\xi')\,z \times \exp\left\{\varphi(\xi')\int_0^{x_n}\theta^k d\theta\right\} \quad z\in\mathbb{C}.$$

$\widetilde{E} = \widetilde{E}_0 - \widetilde{E}^+ R^+ \widetilde{E}_0$ とおけば，$(\widetilde{E}, \widetilde{E}^+)(x', \xi')$ が逆作用素となっている。$(\widetilde{E}, \widetilde{E}^+)(x', \xi') \in S^0(\mathbb{R}^{n-1}; L^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}, H^{\frac{k}{2}}(\mathbb{R}))$ を示す為には，k が偶数ならば $y_n \leq x_n$ に対して $(x_n - y_n)^{k+1} \leq C(x_n^{k+1} - y_n^{k+1})$ が成りたち，k が奇数ならば，$0 \leq y_n \leq x_n$，$0 \geq y_n \geq x_n$ で同様の不等式が成りたつ事と次のよく知られた補題を用いて要領よく丁寧に計算すれば導びかれる。

（補題 3.2）

$K(x, y)$ を可測函数とし，$\int |K(x,y)| dy$，$\int |K(x,y)| dx$ がそれぞれ $L^\infty(X; dx)$，$L^\infty(Y; dy)$ に属しそのノルムは C を越えないならば，$K(x, y)$ を核とする $L^2(Y; dx)$ から $L^2(X; dx)$ への有界作用素のノルムは C を越えない。

今，$\Psi, \widetilde{\Psi}$ を $WF(\Psi)$，$WF(\widetilde{\Psi})$ が $\chi(\rho)$ の conic 近傍に入っている properly supported な擬微分作用素とし，更にこれ等は，$S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ に属し $\chi(\rho)$ の conic 近傍でその表象は 1 とする。

（命題 3.3）

$G = \Psi E \widetilde{\Psi}$，$G^+ = \Psi E^+$ と定義すると

$WF'(G) \subset \mathrm{diag}\,(T^*(\mathbb{R}^n) \setminus 0)$

$WF'(G^+) \subset \{((x', 0, \xi', 0), (x', \xi')) \in (T^*(\mathbb{R}^n) \setminus 0) \times (T^*(\mathbb{R}^{n-1}) \setminus 0)\}$

更に任意の $s\in\mathbb{R}$ に対して $G : H^{loc}_s(\mathbb{R}^n) \to H^{loc}_{s+1/k+1}(\mathbb{R}^n)$ $G^+ : H^{loc}_s(\mathbb{R}^n) \to H^{loc}_s(\mathbb{R}^n)$ なる連続作用素である。

（証明）

$\mathcal{R}^+(x', D')$ は positive regular phase function $\langle x', \xi'\rangle + i\varphi(\xi')\int_0^{x_n}\theta^k d\theta$ で定義された Fourier integral 作用素であるから、

$$WF'(R^+) \subset \{((x', \xi'), (x', 0, \xi', 0)) \in (T^*(\mathbb{R}^{n-1})\setminus 0) \times T^*(\mathbb{R}^n)\setminus 0)\}$$

更に一般に $P(x', \xi') \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{n-1}; L^2(\mathbb{R}), H^k_\xi(\mathbb{R}))$ ならば

$$WF'(P(x', D')) \subset \{((x, 0, \xi_n), (y, 0, \eta_n)) \in (T^*(\mathbb{R}^n)\setminus 0) \times T^*(\mathbb{R}^n\setminus 0)\}$$

という事実と命題3.1より示される。

（定理の最終証明）

$(E^+)^*(E^+)(x', D') \in L^{-\frac{2}{k+1}}(\mathbb{R}^{n-1})$ が楕円形の擬微分作用素である事は $\mathcal{R}^+E^+(x, D') \equiv I$ より容易に示され、その自己共役な parametrix を A' とする。今 $\widetilde{F}^+ = G^+A'(G^+)^*$, $\widetilde{F}^- = 0$ $\widetilde{F} = (I - F^+)G$ とすると $(\chi(\rho), \chi(\rho)) \in WF'(F)$, $WF'(F^+)$ であって $\ell(x, D)$ に対して定理を満たしている。従って§2の命題の $Q(x, \xi)$ を主表象とする楕円型作用素 $Q(x, D)$ を考えその parametrix を $Q'(x, D)$ とすると、$\overline{F} = Q'\widetilde{F}$, $\overline{F}^\pm = Q'\widetilde{F}^\pm Q$ とおけば、canonical 変換 χ を施こした後の作用素に対して $\chi(\rho)$ の conic 近傍で成りたっている。良く知られているよ

うに 正準変換に対しては Fourier integral 作用素 $U \in I^0(\mathbb{R}^n \times X, \Gamma')$ （Γ は graph χ の closed subset）があって $UU^* \equiv I$ near ρ, $U^*U \equiv I$ near $\chi(\rho)$ がある。今 $F_\rho = U^* \bar{F} U$ $F_\rho^\pm = U^* \bar{F}^\pm U$ と定義する。$\psi_j \in L^0(X)$ $(j \in J)$ を properly supported な擬微分作用素とし，$\rho_j \in T^*(X) \setminus 0$, $WF(\psi_j)$ は ρ_j の conic 近傍 V_{ρ_j} に入り $\sum \psi_j \equiv I$ をみたす。

$$F = \sum_j \psi_j F_{\rho_j} \quad , \quad F^\pm = \sum \psi_j F^\pm_{\rho_j}$$

ここで ρ_j が P の消えない点ならば，$F^\pm_{\rho_j} = 0$, F_{ρ_j} は P の local parametrix とする。これらが定理をみたすことは容易に示される。 《終》

（参照）

[1], Duistermaat - Sjöstrand, A global construction for ψDOp's with non-involutory characteristics. Invent. Math. 20 209-225 (1973)

[2], Sato, Kawai and Kashiwara, On the structure of single linear ψDEq's. Proc. Japan Acad. 49, 643-646 (1972)

[3], Sjöstrand, Parametrices for ψDop's with multiple characteristics. Arkiv för Math. 12 85-130 (1974).