数理解析研究所講究録
第 241 巻 1975 年 72-85

一般化変位法の収束について

東大　宇航研　菊地文雄

1. 序文

有限要素モデルには各種のものが考えられるが，最近適合モデル以外の手法に関してもかなり数学的な進展がみられた。以下では変位法的な手法を一般化変位法と総称し，その収束についてある程度一般的に成立する性質を整理してみたい。このようにしても具体的な個々のスキームの収束証明が楽になるわけでは必ずしもないが，ある程度見通しは良くなると思う。またこの種の理論が特に有効なのは板の問題である。

ここで一般化変位法と称するのは，変位分布を基準とし，それを使い何らかの方法でひずみ分布，ひずみエネルギを計算し，有限要素方程式を作成するもので，次の諸モデルを含んでいる。

(1) 適合(変位)法：通常の変位法である。

(2) 非適合(変位)法：アルゴリズムは(1)と共通。

(3) 部分近似：従来意識せずにある程度用いられている。

(4) 離散キルヒホッフ仮定：(3)の一種ともみなせる。

(5) ハイブリッド応力法：広い意味では(6)に入る。

(6) 混合法：応力分布を projection 的に決定する。

variational difference method の中には(3)の部分近似を用いて説明できるものがある。さらに少し異ったものとして次のものも考え得る。

(7) 簡略化ハイブリッド変位法（修正剛性法）

(8) 荷重と質量マトリックスの集中化：(3)と関連あり。

(9) 処罰法（penalty method）

以下では(1)〜(6)を中心に一般的に論じ，各論は簡単に触れる。対象は線形の静的問題と振動の固有値問題とする。具体的な評価例については文献表を参照されたい。今後，非自己共役問題，発展方程式，非線形問題についてもかなり一般論が可能になると期待している。

2. 準備

Ω を R^2 の領域とする。周辺固定の板を考え，静的問題の例として次のものを扱う。

$$\begin{cases} \Delta\Delta u = f & (\Omega \text{ 内}) \\ u = \partial u/\partial n = 0 & (\partial\Omega \text{ 上}) \end{cases} \tag{2.1}$$

固有値問題は

$$\begin{cases} \Delta\Delta u = \lambda u & (\Omega \text{ 内}) \\ u = \partial u/\partial n = 0 & (\partial\Omega \text{ 上}) \end{cases} \tag{2.2}$$

Δはラプラシアン，$\partial/\partial n$ は$\partial\Omega$の外方向の法線に沿っての微分とする。たわみ u と荷重 f は $H = L_2(\Omega)$ で考える。一方応力（ひずみ，モーメント，曲率）$v = (v_1, v_2, v_3)$ は V で考える。ただし $v \in V$ の各成分は $L_2(\Omega)$ の元とし，V の内積，ノルムを次式で定義する。（$v, \bar{v} \in V$ である。）

$$\langle v, \bar{v} \rangle = (v_1, \bar{v}_1) + (v_2, \bar{v}_2) + 2(v_3, \bar{v}_3) \qquad (2.3)$$

$$|||v||| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} = (\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + 2\|v_3\|^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.4)$$

ただし（，），$\|\ \|$ は H の内積とノルムである。各 v に対し $k_{ij}(v)$ $(1 \leqq i, j \leqq 2)$ を次式で対応させる。

$$k_{11}(v) = v_1, \quad k_{22}(v) = v_2, \quad k_{12}(v) = k_{21}(v) = v_3 \qquad (2.5)$$

ひずみ—変位関係式を $\qquad v = \mathcal{P} u \qquad (2.6)$

で表わす。今の場合 $\mathcal{P}$ の定義域は $D(\mathcal{P}) = H_0^2(\Omega)$ とすればよく，$\mathcal{P} : D(\mathcal{P}) \rightarrow V$ で，$\mathcal{P}u$ の成分表示は次の通り。

$$k_{ij}(v) = \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j \qquad (2.7)$$

以上では板の曲げ剛性を1，ポアソン比を0にしたことになる。一般の場合に拡張することはある程度の制限下では容易である。また他の正定値（自己共役）の問題に適用することも少なくとも形式的には容易である。

(2.1)，(2.2) に対応する仮想仕事の原理の表示式は

$$\langle \mathcal{P}u, \mathcal{P}\bar{u} \rangle = (f, \bar{u}) \qquad (\forall u \in D(\mathcal{P})) \qquad (2.8)$$

$$\langle \mathcal{P}u, \mathcal{P}\bar{u} \rangle = \lambda (u, \bar{u}) \qquad (\forall u \in D(\mathcal{P})) \qquad (2.9)$$

序文で述べた(1)〜(6)の手法では有限要素空間(有限次元)$S^h \subset H$をまず定め，次に何らかの方法で$\mathcal{T}$の近似作用素$T_h : S^h \longrightarrow V$を決定する。このとき(2.8)，(2.9)に対応する近似方程式は次の通り。($u_h \in S^h$が有限要素解)

$$\langle T_h u_h, T_h \bar{u}_h \rangle = (f, \bar{u}_h) \quad (\forall \bar{u}_h \in S^h) \qquad (2.10)$$

$$\langle T_h u_h, T_h \bar{u}_h \rangle = \lambda_h (u_h, \bar{u}_h) \quad (\forall \bar{u}_h \in S^h) \qquad (2.11)$$

なおfもf_hとなる場合が多いが，ここでは無視しよう。またhは離散化パラメータで，$h \downarrow 0$は離散化を限りなく精密にすることを意味する。具体的には要素の直径を限りなく0に近づけることに大体対応する。

次に収束として何を望むかが問題になる。ここで最低必要と考えられるものとして次を採用する。

$$(2.10) \ : \lim_{h\to 0} ||| T_h u_h - T u ||| = \lim_{h\to 0} \| u_h - u \| = 0 \qquad (2.12)$$

$$(2.11) \ : \begin{cases} \lim_{h\to 0} \lambda_{hi} = \lambda_i \quad (i = 1, 2, \cdots) \\ \lim_{h\to 0} ||| T_h u_h - T u ||| = \lim_{h\to 0} \| u_h - u \| = 0 \end{cases} \qquad (2.13)$$

ただし(2.13)での固有元の収束は適当なnormalizationの下で意味を有する。

さて一般に$||| \mathcal{T} u ||| \geq \delta \| u \|$ ($\forall u \in D(\mathcal{T})$)，$\delta > 0$が成立している場合を扱うとすれば，$T_h$を固有値の近似にも使えるためには少なくとも$\delta^* > 0$を選べて

$$||| T_h u_h ||| \geq \delta^* \| u_h \| \quad (\forall u_h \in S^h) \qquad (2.14)$$

がhによらず（あるいは$h \leq h^*$のとき）成立することが必要である。またuを厳密解としたとき，各S^hから$\hat{u}_h$を選べて

$$\lim_{h\to 0} |||T_h\hat{u}_h - Tu||| = \lim_{h\to 0} \|\hat{u}_h - u\| = 0 \tag{2.15}$$

が成立することも(2.12)，(2.13)のために必要である。この点は$\hat{u}_h$として有限要素解u_hをとってみればわかる。

3. 静的問題 (2.10)

(2.14)，(2.15)を仮定する。(2.14)によりu_hの一意存在は明らか。収束にはこれだけでは不十分である。$u_h^* \in S^h$を次式により決定する。

$$\langle T_h u_h^*, T_h\bar{u}_h\rangle = \langle Tu, T_h\bar{u}_h\rangle \quad (\forall \bar{u}_h \in S^h) \tag{3.1}$$

（u_h^*は一意に存在）

このとき容易にわかるように$\forall \bar{u}_h \in S^h$に対し次式が成立する。

$$|||T_h\bar{u}_h - Tu|||^2 = |||T_h u_h^* - Tu|||^2 + |||T_h\bar{u}_h - T_h u_h^*|||^2 \tag{3.2}$$

u_hを有限要素解((2.10)の解)としてみる。(3.2)より収束の必要十分条件は（$|||\ \ |||$に関する収束）

$$\lim_{h\to 0} |||T_h u_h^* - Tu||| = \lim_{h\to 0} |||T_h u_h - T_h u_h^*||| = 0 \tag{3.3}$$

である。$|||T_h u_h^* - Tu||| \leq |||T_h\bar{u}_h - Tu|||$が$\forall \bar{u}_h \in S^h$について成立するから(3.3)の最初の条件は(2.15)により満足される。一方(3.3)の後者は(2.10)と(3.1)を組み合わすことにより

$$\lim_{h\to 0} A_h(u) = 0 \quad , \tag{3.4}$$

$$A_h(u) = \sup_{\bar{u}_h \in S^h} \frac{|B_h(u, \bar{u}_h)|}{|||T_h\bar{u}_h|||} \tag{3.5}$$

$$B_h(u, \bar{u}_h) = (f, \bar{u}_h) - \langle \gamma u, \gamma_h \bar{u}_h \rangle \qquad (3.6)$$

に等価なことがわかる。

なお $\|u_h - u\| \to 0$ は以上の条件が成立していれば容易に確認できる。

一般に (3.4) の確認はかなり大変で，これが各論の一つのポイントである。また混合法などでは (2.15) の条件の確認も必ずしも容易ではない。しかし形式的には有限要素解の収束が極めて簡単な原理で支配されていることが明らかになった。*)
$\hat{u}_h - u$，$A_h(u)$ 等に対する評価は単に $f \in L_2(\Omega)$ の場合，$c(h)\|f\|$ の形でおさえられることが望ましい。

4. 固有値問題 (2.11)

ここでは
$$A_h(u) \leq c(h)\|f\| \qquad (4.1)$$
の形の評価が $^\forall f \in H$ に対する解 u について与えられているものとする。一般に適合法の場合には近似固有値の下界は対応する真の固有値により与えられることが min-max 原理から容易にわかる。一方上界は S^h の近似能力を調べることにより与えられ，固有元の誤差はこれらの結果を元にして評価できる。その詳細は例えば Strang & Fix の教科書に見出せる。

ところが適合法以外では様子が変ってくる。上界に対する

*) 以上の記述は電気通信大の牛島照夫氏の討論に依る所が大きい。その結果元の記述よりかなり見通しが良くなった。

評価は3の境界値問題に対する結果を基本として導びける。しかし下界についてはより複雑である。それは適合法の場合ほどすなおに min-max 原理を適用できないためである。

以下では下界について著者の考案した手法を紹介する。上界および固有元の評価も適合法の場合より少し複雑になるが，本質的には同様であり，紙面の制限もあるので省略する。

λ_{hi} を i 番目の近似固有値とする。S^h での min-max 原理により

$$\lambda_{hi} = \min_{S_i^h \subset S^h} \max_{\substack{u_h \in S_i^h \\ u_h \neq 0}} \frac{|||T_h u_h|||^2}{\|u_h\|^2} \tag{4.2}$$

ここで S_i^h は S^h の（任意の）i-次元部分空間とする。S_i^h は i 次元であるから，次の $(i-1)$ 個の拘束条件をすべて満す非ゼロ元 $u_h \in S_i^h$ が存在する。（u_j は真の固有元）

$$(u_h, u_j) = 0 \qquad (1 \leq j \leq i-1) \tag{4.3}$$

$v \in H_0^2(\Omega)$ を次式で定義する。$(\forall \bar{u} \in H_0^2(\Omega))$

$$\langle T v, T \bar{u} \rangle = (u_h, \bar{u}) \tag{4.4}$$

このとき $\langle Tv, Tu_j \rangle = \lambda_j (v, u_j) = 0 \quad (1 \leq j \leq i-1)$

を得るから，Rayleigh の原理により次式が成立する。

$$|||T v|||^2 \geq \lambda_i \|v\|^2 \tag{4.5}$$

さて前節で得た関係式を利用すると

$$\begin{aligned} \|u_h\|^2 &= \langle T v, T_h u_h \rangle + B_h(v, u_h) \\ &\leq |||T v|||\,|||T_h u_h||| + A_h(v)\,|||T_h u_h||| \end{aligned} \tag{4.6}$$

(4.4) から $\quad |||T v|||^2 \leqq \|u_h\| \|v\| \leqq \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \|u_h\| |||T v||| \qquad (4.7)$

(4.1) から $\quad A_h(v) \leqq c(h) \|u_h\| \qquad (4.8)$

よって $\quad \|u_h\| \leqq \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} + c(h) \right\} |||T_h u_h||| \qquad (4.9)$

hが十分小ならば $i \leqq N$ として（Nはhに依存せず）

$$\frac{|||T_h u_h|||^2}{\|u_h\|^2} \geqq \lambda_i (1 - c^*(h)) \qquad (4.10)$$

(4.10) の右辺は S_i^h に依存しないから，(4.2) により

$$\lambda_{hi} \geqq \lambda_i (1 - c^*(h)) \qquad (4.11)$$

特に適合法では $A_h = 0$ ゆえ $\lambda_{hi} \geqq \lambda_i$ なる通常の評価となる。

5. 簡略化ハイブリッド変位法と処罰法

T_hとしては非適合法と同じものを考える。S^hでの対称な双一次形式 $B_h^*(u_h, \bar{u}_h)$ を導入する。これを変分的に導入したのがハイブリッド変位法で，一方処罰項として正値の項を導入したのが処罰法である。(3.4) 以外の仮定はすべて採用しておく。S^hが適合なら必然的に $B_h^* = 0$ となる。

有限要素スキームは

$$\langle T_h u_h, T_h \bar{u}_h \rangle + B_h^*(u_h, \bar{u}_h) = (f, \bar{u}_h) \qquad (5.1)$$

$$\langle T_h u_h, T_h \bar{u}_h \rangle + B_h^*(u_h, \bar{u}_h) = \lambda_h (u_h, \bar{u}_h) \qquad (5.2)$$

ハイブリッド変位法では $|||T_h u_h|||^2$ と $|||T_h u_h|||^2 + B_h^*(u_h, u_h)$ の同等性（大きさがhによらず同程度の非負値）を仮定する。

このとき

$$\sup_{\bar{u}_h \in S^h} \frac{|B_h^*(\hat{u}_h, \bar{u}_h) - B_h(u, \bar{u}_h)|}{[\,|||T_h \bar{u}_h|||^2 + B_h^*(u_h, u_h)]^{\frac{1}{2}}} \to 0 \quad (h \downarrow 0) \qquad (5.3)$$

が(2.15)と同じ $\hat{u}_h \in S^h$ についてが確認できればよい。これらの方法は新たな項を加えることにより(3.4)の条件を変えて収束しやすくしていることになる。ハイブリッド変位法では(5.3)の分子が差の形で評価しやすくなるし，処罰法では各項が0に収束する。

固有値問題については次のようにする。(5.1)で f の代りに(4.3)で使った $u_h \in S^h \subset H$ を使用し，それに対する有限要素解を v_h とする。このとき

$$|||T_h v_h|||^2 + B_h^*(v_h, v_h) \leqq \|u_h\| \left(\|v\| + \|v_h - v\|\right) \qquad (5.4)$$

一方(4.7)により $\|v\| \leqq \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\|Tv\| \leqq \dfrac{1}{\lambda_i}\|u_h\|$，また $\|v_h - v\| \leqq c(h)\|u_h\|$ とすると

$$|||T_h v_h|||^2 + B_h^*(v_h, v_h) \leqq \left\{\frac{1}{\lambda_i} + c(h)\right\}\|u_h\|^2 \qquad (5.5)$$

一方

$$\|u_h\|^2 = \langle T_h v_h, T_h u_h \rangle + B_h^*(v_h, u_h)$$

$$\leqq E_h(v_h)\, E_h(u_h) \qquad (5.6)$$

ただし

$$E_h(v_h) = \left[|||T_h v_h|||^2 + B_h^*(v_h, v_h)\right]^{1/2} \qquad (5.7)$$

よって

$$\|u_h\|^2 \leqq \left[\frac{1}{\lambda_i} + c(h)\right]^{\frac{1}{2}} \|u_h\|\, E_h(u_h)$$

or

$$\frac{E_h^2(u_h)}{\|u_h\|^2} \geqq \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i c(h)} \qquad (5.8)$$

これにより下界が得られた。処罰法の場合にはこのあたりはもっと簡単に導びける。（以上は発表後気付いた。）

6. 集中化 (lumping operator)

L_h: lumping operator とする。以上は主にアの近似であったが、(2.10), (2.11) で右辺の $\bar{u}_h$ の代りに上記の $L_h : S^h \to H$ を用いて

$$\langle T_h u_h, T_h \bar{u}_h \rangle = (f, L_h \bar{u}_h) \qquad (6.1)$$

$$\langle T_h u_h, T_h \bar{u}_h \rangle = \lambda_h (L_h u_h, L_h \bar{u}_h) \qquad (6.2)$$

となった場合を考えよう。以下に収束のための十分条件を与えておく。

静的問題

$$C_h(f) = \sup_{\bar{u}_h \in S^h} \frac{|(f, L_h \bar{u}_h - u_h)|}{|||T_h \bar{u}_h|||} \qquad (6.3)$$

$$\lim_{h \downarrow 0} C_h(f) = 0$$

すべての $f \in H$ について成立するためには結局次の条件とほとんど同じになる。ただし f が十分なめらかなら違い得る。

固有値問題

$$D_h = \sup_{\bar{u}_h \in S^h} \frac{\| L_h \bar{u}_h - \bar{u}_h \|}{|||T_h \bar{u}_h|||} \qquad (6.4)$$

$$\lim_{h \downarrow 0} D_h = 0$$

いずれもそれほどむずかしくはない。ここでの lumping は u_h を $L_h u_h$ で置きかえたわけであるが、より直接的に何らかの物理的直観が用いられることが多い。そのようなものすべてがここの方法で説明はされないと思われる。

7. Nitsche's trick

以上では応力の収束 $|||T_h u_h - \mathcal{T} u|||$ が中心で変位の収束 $\|u_h - u\|$ は (2.14) を使って rough な評価を得ているにすぎない。今少し精密な評価が得られる場合もあるので，境界値問題について Nitsche's trick を一般化しておこう。まず

$|||T_h \hat{u}_h - \mathcal{T} u||| \leq c(h) \|f\|$ なる評価は得られるとする。

$\phi = u_h - u$ に対し $\psi \in H_0^2(\Omega)$ を次式で定義する。

$$\langle \mathcal{T}\psi, \mathcal{T}\bar{u} \rangle = (\phi, \bar{u}) \qquad (\forall \bar{u} \in H_0^2(\Omega)) \quad (7.1)$$

すると
$$\begin{aligned}
\|\phi\|^2 &= \langle \mathcal{T}\psi, T_h u_h - \mathcal{T}u \rangle + B_h(\psi, u_h) \\
&= \langle \mathcal{T}\psi - \mathcal{T}\psi_h, T_h u_h - \mathcal{T}u \rangle + B_h(\psi, u_h) \\
&\qquad + B_h(u, \psi_h) \qquad\qquad (\forall \psi_h \in S^h) \\
&\leq c(h) \|\phi\| \, |||T_h u_h - \mathcal{T}u||| \\
&\qquad + B_h(\psi, u_h) + B_h(u, \psi_h) \qquad (7.2)
\end{aligned}$$

よって
$$\frac{|B_h(\psi, u_h) + B_h(u, \psi_h)|}{\|\phi\|} \to 0 \qquad (7.3)$$

の評価が $|||T_h u_h - \mathcal{T}u|||$ の評価よりも良ければ $\|u_h - u\|$ の誤差はモーメントのそれより良好ということになる。もし lumping の項が入ると (6.3) の c_h の項も効いてくる。

なお (5.1) のスキームでは

$$\|\phi\|^2 = \langle \mathcal{T}\psi - \mathcal{T}\psi_h, T_h u_h - \mathcal{T}u \rangle + B_h(\psi, u_h)$$

$$+ B_h(u, \psi_h) - B_h^*(\psi_h, u_h) \tag{7.4}$$

となるので，右辺の第2項以下全体の評価によっては誤差のオーダーが上る。

一般化変位法ではハイブリッド変位法やハイブリッド応力法など特別な場合を除き，一般に変位の誤差はモーメントよりも必ずしも改善はされないようである。ただし変位が一様収束することは板の曲げではかなり認められるようである。

8. 各論 （詳細省略）

以下に簡単に代表的な手法を述べておく。それぞれに B_h が定まるのであるが，その具体形は省略しよう。

(1) 適合変位法： $T_h = T$ の S^h への restriction で $B_h = 0$。
ほとんどすべてがうまくいく。

(2) 非適合変位法： T_h : $k_{ij}(v) = \dfrac{\partial^2 u_h}{\partial x_i \partial x_j}$ の関数部分の寄せ集め。そのままでは V に入らない。

(3) 部分近似 ： $J_{hi} : S^h \longrightarrow H \quad (i=1, 2, 3)$ を定める。
S^h は conforming でもそうでなくてもよい。しかし $J_{hi} u_h$ はある方向には conforming になり，次の成分が V の元として意味を有する。

$$v_1 = \partial^2 J_{h1} u_h / \partial x_1^2, \quad v_2 = \partial^2 J_{h2} u_h / \partial x_2^2,$$
$$v_3 = \partial^2 J_{h3} u_h / \partial x_1 \partial x_2$$

(4) 離散キルヒホッフ仮定（の一解釈）：

$$J_{hi} : S^h \to H_0^1(\Omega) \qquad (i=1,2)$$

$$k_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial J_{hi} u_h}{\partial x_j} + \frac{\partial J_{hj} u_h}{\partial x_i}\right)$$

証明のさい S^h を conforming にしておくとやりやすい。

(5), (6) 混合法, ハイブリッド応力法 : V に部分空間を定め, orthogonal projector (S^h が conforming), もしくはそれを部分積分で弱い形 (S^h が non-conforming) にしたものを用いて $\mathcal{T}_h$ を定める。

(7) variational difference method : $\mathcal{T}_h$ は $\mathcal{T}$ の差分近似。差分法を H 内での近似とみて artificial に S^h を導入すると (3) にかなり近いと思われる。

9. 注意

(2.14) なる条件を仮定したが, 4 からわかるように, (4.1) なる評価を (2.14) を用いずに得られれば, 実は (2.14) が証明されたことになる。これは特に非適合モデルなどで有効と思う。

著者の感じでは適合法が不便なときは部分近似, 離散キルヒホッフ仮定, ハイブリッド応力法などが板の曲げについては便利のように思われる。

〈文献表〉

(1) G. Strang & G. Fix, An analysis of the finite element method, Prentice-Hall, 1973.

(2) T. Miyoshi, Finite element method of mixed type and its convergence in linear shell problems, Kumamoto J. Sci. (Math.), 1973.

(3) 藤田, 水谷, Sectorial 作用素に対する混合型の有限要素近似, 日本数学会応用数学分科会講演予稿, 1973

(4) I. Babuška, M. Zlámal, Non-conforming elements in the finite element method with penalty, SIAM J. Numer. Anal. 10 (1973) 863-875.

(5) C. Johnson, On the convergence of a mixed-finite element method for plate bending problems, Numer. Math. 21 (1973) 43-62.

(6) F. Kikuchi & Y. Ando, On the convergence of a mixed finite element scheme for plate bending, Nucl. Eng. Des. 24 (1973) 357-373

(7) F. Kikuchi & Y. Ando, Convergence of simplified hybrid displacement method for plate bending, J. Fac. Eng. Univ. Tokyo (B) 31 (1972) 693