数理解析研究所講究録
第 241 巻 1975 年 145-160

流体力学における安定性に関する一考察

三菱重工　藤野　勉
〃　山田祐司

1. 緒言

流体力学では流れまたはそれに伴う現象の安定性が問題となることがある。こゝに安定とは次の定義によるものである。すなわち流れまたはそれに伴う現象において定常状態(正解)が存在し，状態がこれより少しはなれるとき，もとの状態に復帰する性質をもつときを安定，しからざる場合を不安定と考える。したがって振動論における静的安定を意味するもので，所謂動的不安定もこゝでは安定と判断する。特に問題が非線形性をもつ場合，その解を求めるため反復計算がよく用いられるがこのときその収束性が大きな問題となる。こゝでは併せて現象の安定性と反復計算の収束性についても考察を行うこととした。具体的な問題としては，翼の捻屈現象，流れの中の拡散現象ならびに高速流体力学における安定性と収束性をとりあげた。

2. 現象系の安定性と反復計算の収束性の関係

現象系の状態変数を u_i とし，その挙動を記述する方程式を一般に

$$f_i(u)=0 \tag{2.1}$$

とする。こゝで

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j}=\frac{\partial f_j}{\partial u_i} \tag{2.2}$$

の関係が保たれているものとする。すなわちある汎関数 $\Pi(u)$ が存在し，変分原理

$$\delta\Pi(u)=\frac{\partial\Pi(u)}{\partial u_i}\delta u_i=f_i(u)\,\delta u_i=0 \tag{2.3}$$

によって (2.1) は導びかれているものと仮定する。(2.1) の正解を u_i^* とし，微小攪乱解を e_i とするとき，e_i は

$$a_i\frac{de_i}{dt}+f_{i,j}^*\,e_j=0,\quad f_{i,j}^*=\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)_{u^*} \tag{2.4}$$

を満足する。上式の解を $e_i(t)=e_i\,e^{-\lambda t}$ とおき

$$\lambda=f_{i,j}^*\,e_i\,e_j\Big/a_i\,e_i^2 \tag{2.5}$$

を導く。したがって $f_{i,j}^*$ が正値行列ならば (2.1) を支配方程式とする現象系は安定，しからざる場合は不安定である。次に反復計算を行うため (2.1) を次のように変形する。

(a) 修正係数行列法

$$c_{ij}(u)\,u_j = f_i \tag{2.6}$$

攪乱解

$$(c^*_{ij} + b^*_{ij})\,e_j = 0, \quad b^*_{ij} = c_{ik,j}(u^*)\,u^*_k \tag{2.7}$$

c^*_{ij}, b^*_{ij} はともに(2.2)により対称である。したがって $c^*_{ij} + b^*_{ij}$ が正値行列ならば安定，しからざれば不安定である。次に反復計算を

$$c_{ij}(u^n)\,u^{n+1}_j = f_i \tag{2.8}$$

によって進める。正解の近傍では攪乱解に対し

$$b^*_{ij}\,e^n_j + c^*_{ij}\,e^{n+1}_j = 0 \tag{2.9}$$

の変換が行われる。こゝに e^n_j は e_j の n 反復値を表す。上式の解を $e^{n+1}_j = \lambda e^n_j$ として

$$\lambda = -b^*_{ij}\,e_i e_j \big/ c^*_{ij}\,e_i e_j \tag{2.10}$$

をうる。したがって系の安定限界を界として反復計算は，系が安定ならば収束，不安定ならば発散する。

(b) 偽荷重法

(2.1)を下記の形に変形する。

$$c_{ij}\,u_j = f_i + g_i(u) \tag{2.11}$$

上式における $g_i(u)$ は非線形項で，見かけの荷重項を表す。

正解近傍の攪乱解

$$a_i \frac{de_i}{dt} + (c_{ij} - g^*_{ij}) e_j = 0, \quad g^*_{ij} = (\partial g_i(u)/\partial u_j)_{u^*} \quad (2.12)$$

上式の解を　$e_i(t) = e_i \, e^{-\lambda t}$　として

$$\lambda = (c_{ij} - g^*_{ij}) e_i e_j / a_i e_i^2 \qquad (2.13)$$

したがって　$c_{ij} - g^*_{ij}$　が正値行列ならばこの系は安定，しからざる場合は不安定である。ただし　c_{ij}, g^*_{ij}　はともに(2.2)により対称である。

反復計算の収束性

$$c_{ij} u_j^{n+1} = f_i + g_i(u^n) \qquad (2.14)$$

正解の近傍で攪乱解は次の変換を行う。

$$c_{ij} e_j^{n+1} = g^*_{ij} e_j^n \qquad (2.15)$$

したがって　$g^*_{ij} e_i e_j / c_{ij} e_i e_j$　の絶対値がつねに1より小ならば収束，大ならば発散する。すなわち系の安定限界を中心として，安定ならば収束，不安定ならば発散する。

以上2つの反復計算の何れによっても不安定な系の正解に近づくことは困難である。

3. 連続系の安定性

連続系の挙動は微分方程式と境界条件式によって記述されている。離散系では前述のように安定性は支配方程式の係数行列の正値性に関係しているが連続系では構成方程式の係数行列がこれに対応する。こゝでは簡単のためまず線形系とし、1従属変数，2階の微分方程式のみを取扱う。独立変数を x_n $(n=1\sim N)$ とし $\varepsilon_n=\partial u/\partial x_n$, $\varepsilon_{N+1}=u$ によってひずみ関数を定義し，これに共役な応力関数を σ_n とする。これらは下記1次式（構成方程式）

$$\sigma_m = k_{mn}\varepsilon_n \tag{3.1}$$

によって結ばれているものとする。たゞし k_{mn} は対称とし $k_{m\,N+1}=0$ $(m=1\sim N)$ とする。k_{mn} の対称性により

$$\sigma_m\,\delta\varepsilon_m = k_{mn}\varepsilon_n\,\delta\varepsilon_m = \delta\,p(u) \tag{3.2}$$

$$p(u)=\frac{1}{2}k_{mn}\varepsilon_m\varepsilon_n \tag{3.3}$$

$p(u)$ はエネルギ関数を表す。Green の公式により

$$\int_a\sigma_m(u)\delta\varepsilon_m(u)dV=\int_a\delta p(u)\,dV=\int_b F(u)\delta u\,dS-\int_a L(u)\delta u\,dV \tag{3.4}$$

を導く。こゝで境界は固定または完全な自由として上式右辺の第1項は消失する。

$$L(u)=\frac{\partial}{\partial x_m}k_{mn}\frac{\partial u}{\partial x_n}-k_{N+1,\,N+1}\,u \tag{3.4}$$

系の安定性を吟味するため時間依存の微分方程式を

$$a\frac{\partial u}{\partial t} = L(u) + f \tag{3.5}$$

とする。上式の一般解を $u(x,t) = u(x)e^{-\lambda t}$ とおいて

$$L(u) + \lambda a u = 0 \tag{3.6}$$

を導く。(3.4) により

$$\int_a (L(u) + \lambda a u)\delta u dV = -\delta\frac{1}{2}\int_a (k_{mn}\varepsilon_m\varepsilon_n - \lambda a u^2)dV = 0 \tag{3.7}$$

$$\therefore \quad \lambda = \int_a k_{mn}\varepsilon_m\varepsilon_n dV \Big/ \int_a a u^2 dV \tag{3.8}$$

上式より安定性について次の結論が導かれる。

k_{mn} が正値ならば系は安定である。

k_{mn} が正値でなくてもその積分値がつねに正ならば系は安定である。しかし積分値が負となるような分布が存在するならば不安定である。k_{mn} は一般に場所の関数で $k_{mn}\varepsilon_m\varepsilon_n$ の正値と非正値の領域に分けられる。そして非正値領域が少しでも存在し，こゝで積分値が負となるような分布が存在すれば全領域に関する積分値も負となりうるので系の安定性は保証されなくなる。次に簡単のため $N=2$ の系について考察する。構成方程式を次のように定める。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1(u) \\ \sigma_2(u) \\ \sigma_3(u) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \\ k_{12} & k_{22} & \\ & & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 = \partial u/\partial x \\ \varepsilon_2 = \partial u/\partial y \\ \varepsilon_3 = u \end{Bmatrix} \tag{3.9}$$

正値条件 $k_{11}>0,\ D=k_{11}k_{22}-k_{12}^2>0,\ k_{33}>0$ (3.10)

微分表式

$$L(u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+k_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+k_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right)-k_{33}u \tag{3.11}$$

こゝで $k_{11}>0$ は仮定して，(3.10)の正値条件が破られる次の2つの場合について考察する。

(a) $D>0,\ k_{33}<0$

この場合は $k=-k_{33}$ の値如何によって安定が保れるときと保たれないことがある。たとえば $k=\lambda_0 a$ として，(3.11) における $k_{33}=0$ としたときの微分方程式 $L(u)+\lambda a u=0$ の最低の固有値を λ_1 とするとき，$\lambda_0<\lambda_1$ ならば安定，$\lambda_0>\lambda_1$ ならば不安定である。

(b) $D<0,\ k_{33}>0$

この場合は $D<0$ の領域が少しでも存在すれば積分値を負とする分布が存在できるのでこの現象系は不安定となる。

以上は自己随伴形微分方程式に関する考察であるが，次に非自己随伴形微分方程式によって記述される系の安定性について検討する。非自己随伴形微分表式の構成式を

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1(u)\\ \sigma_2(u)\\ \sigma_3(u)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & \\ k_{12} & k_{22} & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1=\partial u/\partial x\\ \varepsilon_2=\partial u/\partial y\\ \varepsilon_3=u\end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

とする。この係数行列に関する正値条件は次に示される。

$$k_{11}>0,\quad D=k_{11}k_{22}-k_{12}^2>0,\quad T=k_{11}k_{22}k_{33}+\frac{1}{2}k_{12}k_{31}k_{32}$$
$$-\frac{1}{4}(k_{11}k_{32}^2+k_{22}k_{31}^2+4k_{33}k_{12}^2)>0 \qquad (3.13)$$

たとえば等方性で $k_{11}=k_{22}=k$, $k_{12}=0$ で $k_{33}=0$ ならば

$$D=k^2>0,\quad T=-k(k_{32}^2+k_{31}^2)/4<0 \qquad (3.14)$$

で明に正値条件を満していない。しかし境界条件によっては安定が保証される。これについては拡散問題に関連して後述することとする。

最後に非線形微分方程式によって記述される系の安定性について考察する。非線形微分方程式

$$N(u)+f=0 \qquad (3.15)$$

と与えられた境界条件式を満足する解を $u^*(x)$ とし，その近傍における攪乱解の満すべき微分方程式を

$$L(\delta u)=0 \qquad (3.16)$$

とする。上式は δu に関し線形であるからその安定性は今まで述べた理論により判定することができる。

次に具体的な 2〜3 の例について述べる。

4. 翼の捻屈（divergence）

図1．に示される翼のスパン方向座標を x とし，捩れ角 θ 迎え角 α，捩れ剛性 GJ，風速 V，翼弦長 c，モーメント係数（頭上げを正）C_m とするとき，捩れモーメントの平衡は

$$\frac{d}{dx} GJ \frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{2}\frac{dC_m}{d\alpha}\rho v^2 c^2 (\theta+\alpha)=0 \qquad (4.1)$$

によって与えられる。$dC_m/d\alpha$ の値は，弾性軸が 1/4 弦長点より前方にあれば負，後方にあれば正である。したがって弾性軸が後方にあるような構造の翼については捩りに不安定となる可能性があり，この現象を捩屈，不安定を発生する風速を限界速度とよんでいる。この他翼にはさらに複雑な不安定連成振動 Flutter があるがこゝではとりあげない。

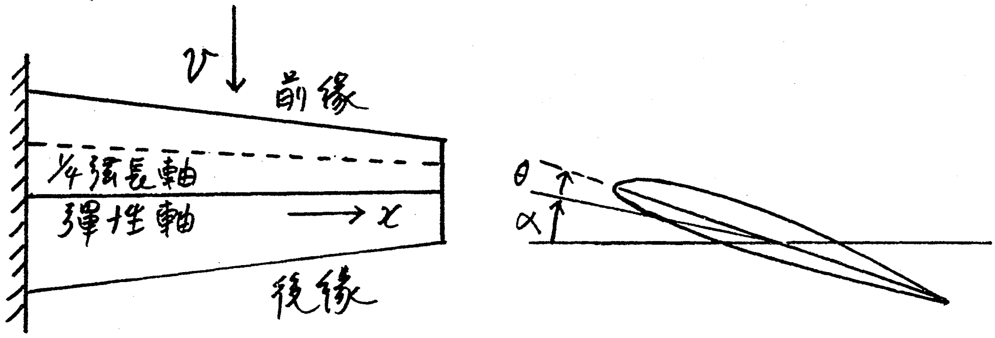

図1. 翼一般図

5. 拡散現象の安定性

θを汚染濃度とするとき，その拡散状況は微分方程式

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_m}k_{mn}\frac{\partial\theta}{\partial x_n}-u_m\frac{\partial\theta}{\partial x_m}+q \qquad (5.1)$$

によって表される。特に等方性拡散では攪乱解 φ は

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}k\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}k\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \qquad (5.2)$$

を満し，その解を $\varphi(x,t)=\varphi(x)e^{-\lambda t}$ とするとき

$$\lambda=\int_a\left[k\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}+\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\varphi\right]dV\Big/\int_a\varphi^2dV \quad (5.3)$$

となる。上の積分における第2項は流体の非圧縮性を仮定しさらに境界条件

$$\begin{cases}\text{固定} & \varphi=0 & b_1\text{上}\\ \text{自由} & \partial\varphi/\partial n=0,\quad u_n=0 & b_2\text{上}\end{cases} \quad (5.4)$$

を考慮し

$$\int_a\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\varphi\,dV=\frac{1}{2}\int_b\varphi^2u_n\,dS=0$$

により消失する。したがってこの現象系は，その構成方程式の係数行列が正値性を満していないにもかゝわらず安定性が保証される。こゝに u,v,w は風速の x,y,z 成分，u_n は境界におけるその法線成分を表す。自由境界で $u_n=0$ を付帯条件としたのは，たとえば地面のような固い壁面は風を通さないためである。

6. 圧縮性流体流れの安定性

圧縮性流体の流れは微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_m}k(q^2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}=0,\quad k(q^2)=\frac{\rho(q^2)}{\rho_0} \quad (6.1)$$

によって与えられる。こゝに φ は速度ポテンシャルで

$$q^2 = u^2 + v^2 + w^2 \tag{6.2}$$

を表し，u, v, w は流速の x, y, z 成分である。境界では

$$\begin{cases} \text{固定} & \varphi = \bar{\varphi} & b_1 \text{上} \\ \text{自由} & \partial\varphi/\partial n = \bar{u}_n & b_2 \text{上} \end{cases} \tag{6.3}$$

の条件式が満されるものとする。上式の汎関数は

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_a k^*(q^2)q^2 dV - \int_{b_2} k\,\bar{u}_n \varphi\, dS \tag{6.4}$$

によって与えられることはよくしられている。こゝに

$$k^*(q^2) = \frac{1}{q^2}\int_0^{q^2} k(q^2)\, dq^2 \tag{6.5}$$

である。

こゝでは簡単のため2次元問題を取扱うこととする。

$$\frac{\partial}{\partial x} k(q^2)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k(q^2)\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$= \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2\frac{uv}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{6.6}$$

上式は非線形微分方程式で形式的に $k_{11} = 1 - u^2/c^2$,
$k_{12} = -uv/c^2$, $k_{22} = 1 - v^2/c^2$ とするとき

$$D = k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 1 - q^2/c^2 = 1 - M^2 \tag{6.7}$$

で $M<1$ ならば楕円形, $M=1$ 放物形, $M>1$ 双曲形 と

なり，流れの場の中に超音速 $M>1$ の領域が少しでも存在すれば流れは不安定となることが予想される。このことをさらに確めるため以下の検討を行った

いま(6.6)式の正解が存在するものとしこれを $\varphi^*(x,y)$ とし，正解近傍の攪乱解を $\phi(x,y)$ とする。

$$\varphi(x,y)=\varphi^*(x,y)+\phi(x,y) \tag{6.8}$$

(6.8)を(6.6)に代入し，適当な変形を行って

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_{11}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\rho_{12}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_{12}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\rho_{22}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=0 \tag{6.9}$$

が導かれる。ここに

$$\rho_{11}=\rho+2\rho' u^2,\quad \rho_{12}=2\rho' uv,\quad \rho_{22}=\rho+2\rho' v^2 \tag{6.10}$$

である。なお $\rho'=d\rho/dq^2$ を表す。(6.9)式は線形微分方程式でその安定が保たれるためには領域内到る所で

$$D=\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2=\rho(\rho+2\rho' q^2)>0 \tag{6.11}$$

が成立つことが必要である。ここで $\rho>0$ は満されているので $\rho+2\rho' q^2>0$ が安定条件である。したがって $\rho+2\rho' q^2=0$ が安定限界を与える。この条件は後述の安定限界のところで述べられるように局所マッハ $M=1$ に達したときに満されることが了解される。この限界条件は非線形微分方程式のまま導いた(6.7)の結果と一致している。次に反復計算の収束性について検討する。

有限要素法によって圧縮性流体力学解析を行う場合、直接変分原理(6.4)を用いて離散化し

$$\Pi = \frac{1}{2} k_{ij} \varphi_i \varphi_j + \frac{1}{4} k_{ijkl} \varphi_i \varphi_j \varphi_k \varphi_l + \cdots - f_i \varphi_i \quad (6.12)$$

$$\delta \Pi = \{ (k_{ij} + k_{ijkl} \varphi_k \varphi_l + \cdots) \varphi_j - f_i \} \delta \varphi_i = 0 \quad (6.13)$$

によることもできるが、数値計算を進める上には下記反復計算による方が便利である。い r 反復値を φ^r として下記線形微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} k^r \frac{\partial \varphi^{r+1}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k^r \frac{\partial \varphi^{r+1}}{\partial y} = 0, \quad k^r = k((q^2)^r) \quad (6.14)$$

を解く。このとき用いる汎関数は

$$\Pi^{r+1} = \frac{1}{2} \iint_G k^r \left\{ \left(\frac{\partial \varphi^{r+1}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^{r+1}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\,dy - \int_{b_2} k^r \bar{u}_n \varphi^{r+1} ds \quad (6.15)$$

である。なお反復計算に用いる係数は k^* ではなく k を用いるべきである。その理由は反復のとき係数は場所の関数として固定されており、その変分はとらないからである。この反復計算は2.(a)において述べた修正係数行列法に属するものである。したがって前述のように系の安定と同時に反復計算の収束性も失う。図2.3はレンズ形物体周りの圧縮性流れを反復法により求めたものであるが一般流速 $V=210$ m/s において、A点で $M=1$ となり、収束性も失うことがわかる。

安定限界

$k + 2q^2 k' = 0$ により安定限界を求める。

$$k = \frac{\rho}{\rho_0} = \left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \left(1 - \frac{q^2}{q_0^2}\right)\right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad (6.16)$$

ただし ρ = 空気密度 γ = 比熱比 ≒ 1.4 M = マッハ数

$$k' = \frac{dk}{dq^2} = -\frac{M_0^2}{2q_0^2}\left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \left(1 - \frac{q^2}{q_0^2}\right)\right\}^{\left(\frac{1}{\gamma-1}-1\right)} \qquad (6.17)$$

$$k + 2q^2 k' = k\left\{1 + M_0^2\left(\frac{\gamma-1}{2} - \frac{\gamma+1}{2}\frac{q^2}{q_0^2}\right)\right\} \Big/ \left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \left(1 - \frac{q^2}{q_0^2}\right)\right\} \qquad (6.18)$$

したがって安定限界における一般マッハは

$$M_0^2 = 2/\{(\gamma+1)n^2 - (\gamma-1)\}, \quad n = q/q_0 \qquad (6.19)$$

によって与えられる。このとき局所マッハは

$$M = nM_0 \Big/ \sqrt{1 - \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 (n^2-1)} \qquad (6.20)$$

となる。(6.19) と (6.20) より $M=1$ が安定限界を与えることが了解される。

7. 謝辞

本論文執筆にあたり，東大藤田宏教授の有益な御助言を頂きました。こゝに厚く謝意を表します。

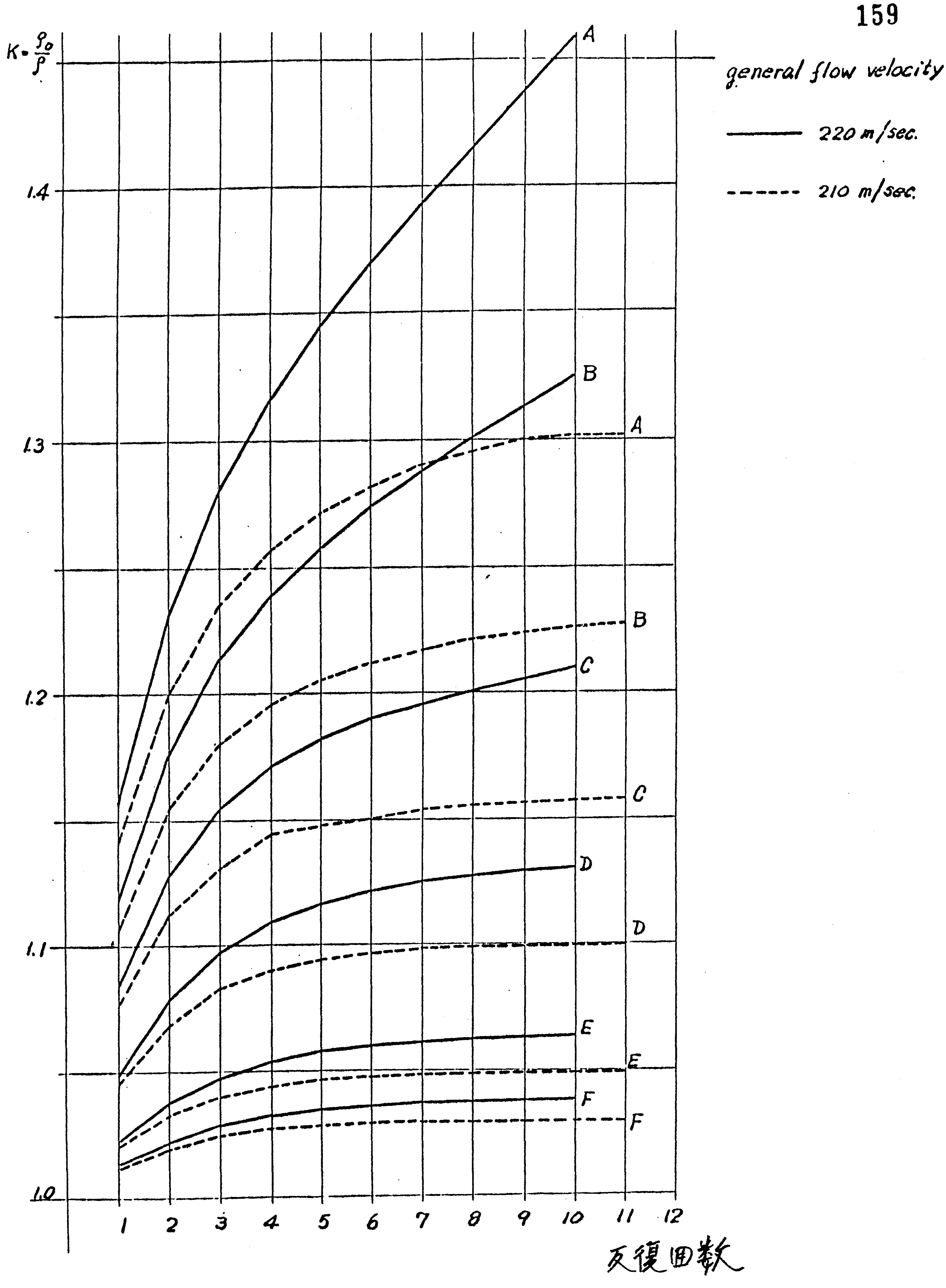
K = ρ₀/ρ
1.4
1.3
1.2
1.1
1.0
A
B
A
B
C
C
D
D
E
E
F
F
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
反復回数
general flow velocity
220 m/sec.
210 m/sec.

図2. 反復計算の収束性

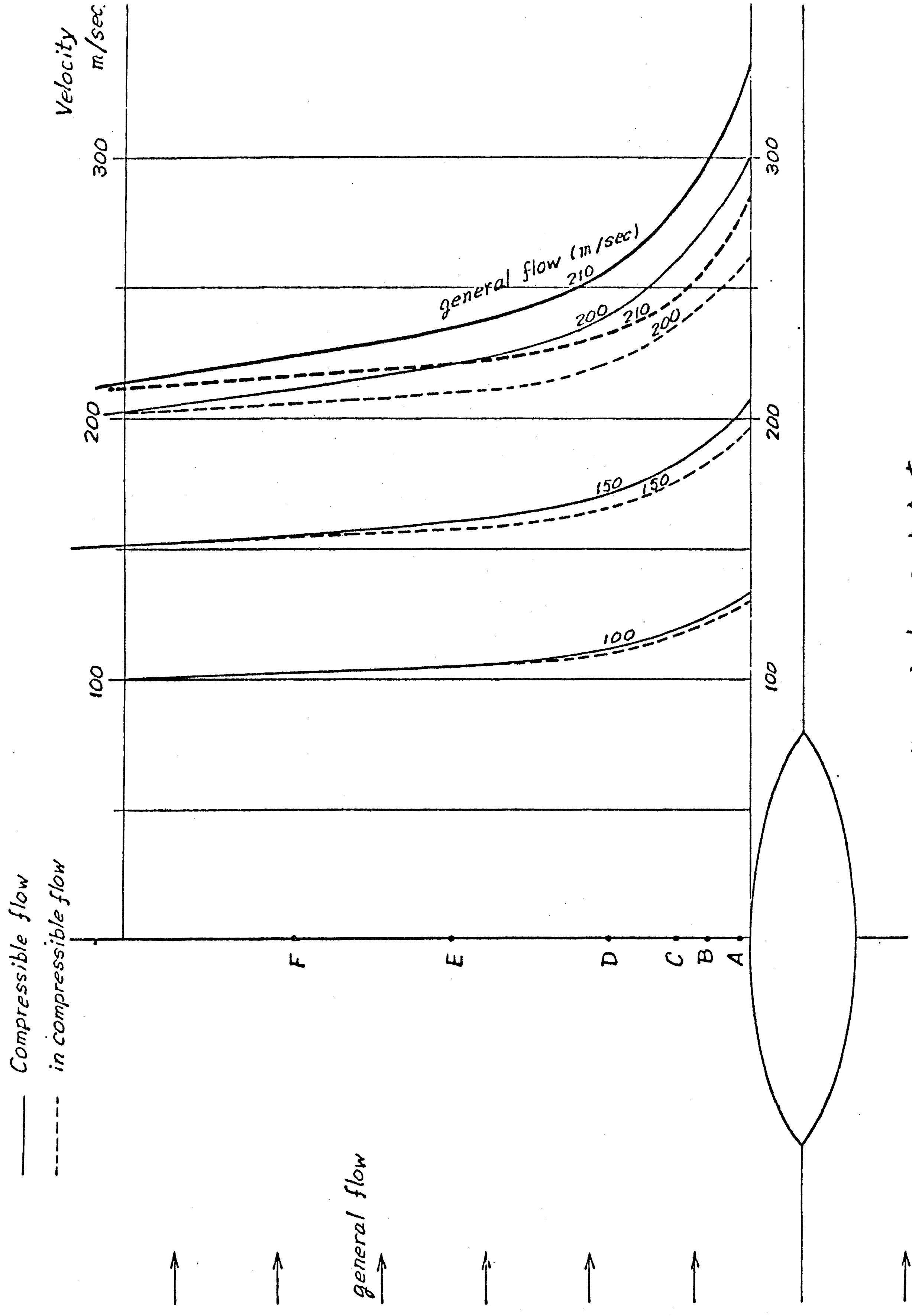

図3. 圧縮性流体の流速分布