数理解析研究所講究録
第243巻 1975年 1-18

4次元空間内のホモロジー球面

神戸大 理　　鈴木 晋一

研究集会の講演では、4次元ユークリッド空間R^4に埋込まれた3次元ホモロジー球面が、3次元球面S^3と同相になるための十分条件を与えたが、その後そこでの議論に飛躍があることが判明したので、本稿では講演時に省略した最初の部分について報告する。読者のお許を乞う。

尚、R^4に埋込まれた3次元ホモロジー球面について、永瀬氏の報告[4]があるので参照されたい。

§1. 準備

考察はすべてCombinatorial Categoryで行う。

R^nをn次元ユークリッド空間，$S^n = R^n \cup \{\infty\}$をn次元球面とする。$D^n$で$R^n$における標準的なn次元球体を示す。

M^3を、方向付可能な3次元閉多様体とする。特に本稿ではR^4（従ってS^4に）に埋込み可能なもののみを取扱う。

対$(M^3 \subset S^4)$, $(M^3 \subset \mathbb{R}^4)$によって、3次元閉多様体$M^3$の$S^4$または$\mathbb{R}^4$への「埋込み」と，$S^4$または$\mathbb{R}^4$に埋込まれた$M^3$とを，適時，表わす。 次のことが知られる：

1.1. 命題（本間）：任意の$(M^3 \subset \mathbb{R}^4)$に対し，ambient isotopy $H: \mathbb{R}^4 \times I \longrightarrow \mathbb{R}^4 \times I$が存在し，対$(H_1(M^3) \subset \mathbb{R}^4)$は次の条件をみたす： $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1$の第4座標軸$\mathbb{R}^1$の座標を高さと考えて，$\mathbb{R}^1$に関する$H_1(M^3)$のMorse関数を与えたとき，

指数0の臨界点の臨界値は，		$-\infty < t < -2$，
指数1の	〃	，$-2 < t < -1$，
指数2の	〃	，$1 < t < 2$，
指数3の	〃	，$2 < t < +\infty$

内に，それぞれある。◀

(1) 上記のように，臨界点をその指数の順に揃えた埋込みを，整列埋込みと呼ぶ。以後ほとんど整列埋込みのみを考察することになる。

(2) 一般に，同じ指数の臨界点同志の順序は変えられない。順序の交換が可能な場合の一般的取扱いが永瀬[4]である。

(3) $(M^3 \subset \mathbb{R}^4)$を整列埋込みとする。有限個の臨界値を除いて，$M^3 \cap \mathbb{R}^3 \times \{t\} \equiv M_t$は方向付可能な閉曲面である。特に，$M_0 = M^3 \cap \mathbb{R}^3 \times \{0\}$は連結となる。そこで，$G(M^3 \subset \mathbb{R}^4) = g(M_0)$，曲面$M_0$の種数，と定める。

1.2. 命題（本間）：$(M^3 \subset \mathbb{R}^4)$ を整列埋込みとすると，$(M^3; M^3 \cap \mathbb{R}^4_+, M^3 \cap \mathbb{R}^4_-; M_0)$ は M^3 の Heegaard 分解である。

ただし，$\mathbb{R}^4_+ = \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$，$\mathbb{R}^4_- = \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0]$ とする。◀

これらの命題から，M^3 に関する多くの情報が，$M_0 = M^3 \cap \mathbb{R}^3 \times [0]$ に反映していることが予想される。

1.3. M_0 の構成：$(M^3 \subset \mathbb{R}^4)$ を整列埋込みとし，$G(M^3 \subset \mathbb{R}^4) = g(M_0) = p$ とする。$M_{-2} = M^3 \cap \mathbb{R}^3 \times \{-2\}$ は，指数 0 の臨界点の個数 s 個の，互いに交わらない 2 次元球面 $\Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_s$ から成る。M_{-2} は $\mathbb{R}^3 \times \{-2\}$ を $s+1$ 個の領域に分割する。そのうちでコンパクトでない領域を外側と名付け，以下この領域と境界を共有する領域を内側とし，残りの領域で内側と境界を共有する領域を外側とし，・・・，と同じように続けて，$s+1$ 個の領域を，内側と外側の 2 種に分ける。一般に有限個の閉曲面 $F_1 \cup \cdots \cup F_s$ が $\mathbb{R}^3$ 内にあるときも，このルールに従って，$s+1$ 個の領域に内側と外側の区別をするものとする。

さて，$\mathbb{R}^3 \times (-2, -1)$ 内では，$s+p-1$ 個の指数 1 の臨界点があるが，これらは普通に，指数 1 のハンドル $h_i : D^1 \times D^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \{t\}$，$-2 < t < -1$，$i = 1, 2, \cdots, s+p-1$，が順次 M_{-2} に付加されると考える。閉曲面 M_{-2} にハンドル h_1 を付加して得られる曲面を

$$M_{-2}(h_1) \equiv M_{-2} - h_1(\partial D^1 \times D^2) \cup h_1(D^1 \times \partial D^2)$$

のように書き，帰納的に $M_{-2}(h_1)(h_2) = M_{-2}(h_1, h_2)$ のように書け

ば，$M_2(h_1, h_2, \cdots, h_{s+p-1}) = M_0$ と考えることが出来る。ここで Rourke-Sanderson [6, §6] の notation を借用しよう。ハンドル h_i の b-sphere $h_i(\{0\}\times\partial D^2)$ を b_i で，b-tube $h_i(\{0\}\times D^2)$ を B_i，$i=1,2,\cdots,s+p-1$，で示すことにする。ところで，いわゆる handle-isotopy ([8], §2, p.116) を使えば，p個のハンドルについてはその a-sphere (2点) が $\Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_s$ のうちの同一の球面上にあり，残りs−1個のハンドルについてはその a-sphere が異なる球面上にあるように出来る，[8] Th. 2.3. 才1のタイプのハンドルを本質的ハンドル，才2のタイプのハンドルを繋ぎハンドルと呼ぼう。$h_{\lambda_1}, h_{\lambda_2}, \cdots, h_{\lambda_p}$ を本質的ハンドルとすると，$\{b_{\lambda_1}, b_{\lambda_2}, \cdots, b_{\lambda_p}\}$ はハンドル体 $M^3 \cap R^4_-$ の meridian系となる。さらに，M_0 上に，互いに素な単純閉曲線の族 $\{b^*_{\lambda_1}, b^*_{\lambda_2}, \cdots, b^*_{\lambda_p}\}$ で次の性質をもつものが選べる：$b^*_j \cap b_j$ は唯一つの交叉点から成り，$b^*_j \cap b_k = \phi$ $(j \neq k)$. $b^*_{\lambda_i}$ を b_{λ_i} の dual と呼ぶ。これは一意ではないが，ハンドル体 $M^3 \cap R^4_-$ の 1st ホモロジー群の基底となる。特に $b^*_{\lambda_i} \subset R^3 \times \{0\}$ が結び目として平凡に選べるとき，ハンドル h_{λ_i} は unknotted であるという。

一般に i 番目のハンドル h_i の core $h_i(D^1\times\{0\})$ が $M_2(h_1, \cdots, h_{i-1})$ の内側にあるとき，ハンドル h_i は内側にあるといい，外側にあるとき h_i は外側にあるという。

次に指数2の臨界点に対応して，指数2のハンドルが，区間 $\mathbb{R}^3\times(1,2)$ で順次 M_0 に付加される。指数2のハンドルを簡単にドームと呼び，$d_1, d_2, \cdots, d_r$ で示す。M_0 上には、互いに素な r 個の単純閉曲線 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ が存在して，ドーム $d_1, d_2, \cdots, d_r$ が順次 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ を a-sphere として、M_0 に付加される。M_0 に d_1 が付加された後の閉曲面を

$$M_0(d_1) \equiv M_0 - d_1(\partial D^2\times D^1) \cup d_1(D^2\times\partial D^1)$$

のように書き、帰納的に $M_0(d_1)(d_2) = M_0(d_1, d_2)$ のように書けば，$M_0(d_1, d_2, \cdots, d_r)$ は $M^3 \cap \mathbb{R}^3\times\{2\}$ と考えることが出来て，これは指数3の臨界点の個数の2次元球面である。ドーム d_i が本質的とは，$M_0(d_1, \cdots, d_{i-1}, d_i)$ の種数が $M_0(d_1, \cdots, d_{i-1})$ より小さいとき，繋ぎとは，$M_0(d_1, \cdots, d_{i-1}, d_i)$ の連結成分の数が $M_0(d_1, \cdots, d_{i-1})$ のそれより大きいときとする。一般に i 番目のドーム d_i の core $d_i(D^2\times\{0\})$ が $M_0(d_1, \cdots, d_{i-1})$ の内側（または外側）にあるとき，ドーム d_i は内側（または外側）にあるという。

この節の最後に次を挙げておく。

1.4. 命題： 本質的ドームの a-spheres と，本質的ハンドルの b-spheres として得られる M_0 上の閉曲線系 $\{a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_p\}$ は、M^3 の Heegaard 分解 $(M^3; M^3\cap\mathbb{R}^4_+, M^3\cap\mathbb{R}^4_-, M_0)$ の Heegaard 図式である。◀

§2. ホモロジー球面

これより M^3 を3次元ホモロジー球面に限定する。

命題1.2 とレンズ空間についてよく知られる結果より，次が得られる．

2.1. <u>命題</u>： $(M^3 \subset \mathbb{R}^4)$ をホモロジー球面の整列埋込みとする。もし $G(M^3 \subset \mathbb{R}^4) \leqq 1$ ならば，$M^3 \cong S^3$ である。ここで $\cong$ は"同相"を示す。◀

2.2. <u>補題</u>： $(M^3 \subset \mathbb{R}^4)$ をホモロジー球面の整列埋込みとし，$G(M^3 \subset \mathbb{R}^4) = p > 0$ とする。本質的ハンドル $h_{\lambda_1}, \cdots, h_{\lambda_p}$ のうち，q 個が内側（従って $p-q$ 個が外側）にあれば，本質的ドーム $d_{\mu_1}, \cdots, d_{\mu_p}$ のうち q 個が内側（従って $p-q$ 個が外側）にある。（永瀬 [4] p.147，系2 参照.）◀

この補題は実は，次の補題の帰結である．

2.2. <u>補題</u>： $(M^3 \subset \mathbb{R}^4)$ をホモロジー球面の整列埋込みとし，h_i を本質的ハンドルとする。 $b_i = h_i(\{0\} \times \partial D^2)$ の dual b_i^* を，$M^3 \cap \mathbb{R}^4_-$ のホモロジーの元として，ホモロジカルに消去(cancel)するドームは，h_i と同じ側にしかとれない。

<u>証明</u>は，ホモロジー球面の Heegaard 図式の特徴づけ（例えば，寺阪[10, 定理10]等を参照。Magnus et al [3] の p.178 前後に歴史的な解説もある）を利用する。実際 M_0 は $S_0^3 = \mathbb{R}^3 \times \{0\} \cup \{\infty\}$ を2つの領域 V と W に分割するが，Fox[1, (1)] によ

り、これらの領域は S^3 内のある線形グラフ(=1次元複体)の閉補空間に同相となる。特に、証明をよく見れば、次のような特別なグラフ、p-leafed roses ([7, p.377, 1.2]), $(C\subset S^3)$, $(C'\subset S^3)$ が存在する:「C は p 個の円周 $S_1\cup\cdots\cup S_p\subset S^3$ と p-forest Ω から成り、C' も p 個の円周 $S_1'\cup\cdots\cup S_p'\subset S^3$ と p-forest Ω' から成る。$S^3-\mathring{N}(C;S^3)\overset{f}{\cong}V$, $S^3-\mathring{N}(C';S^3)\overset{g}{\cong}W$。もし本質的ハンドル h_i が内側ならば、$\partial N(S_i';S^3)$ の longitude が $\partial W=M_0$ 上の閉曲線 b_i と g で対応し、$\partial N(S_i;S^3)$ の meridian が $\partial V=M_0$ 上の閉曲線 b_i と f で対応する。」これらの事実を使って、p の帰納法により証明される。いずれにしても、本稿でこの補題を使う部分については、更に直観的に判り易いので、詳細は省略する。

次の補題が成立する。

2.4. <u>補題</u>: $(M^3\subset R^4)$ をホモロジー球面の整列埋込みとし、特に $G(M^3\subset R^4)=2$ とする。(もし必要ならば)簡単なハンドルの消去を行えば、$M^3\cap R^4_-$ の部分は次の4種の型に分類される([8] p.120, Prop. 3.6 等参照.):

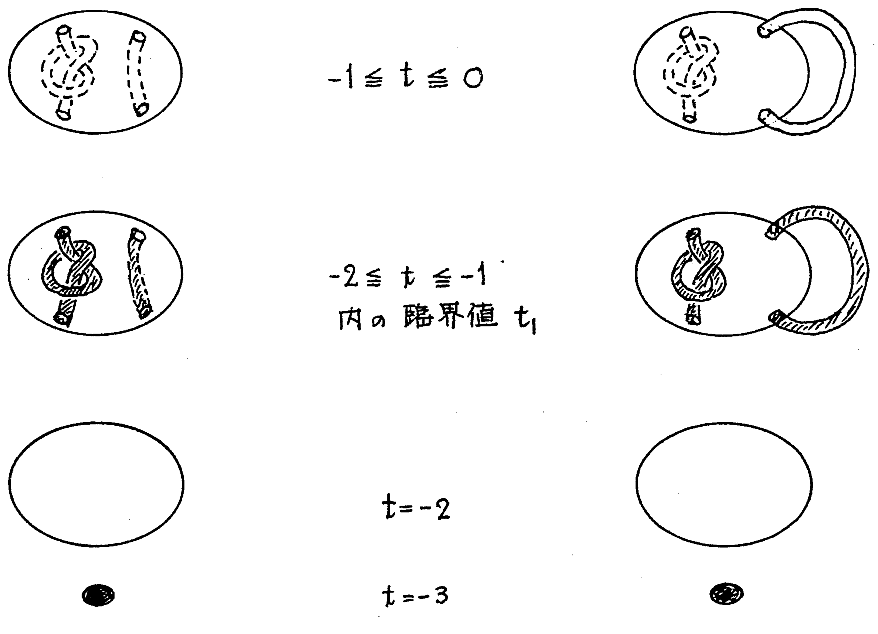
<u>Type 0</u>: 0-ハンドルが1個(Σ_1 とする), 本質的ハンドルが2個(h_1, h_2 とする)あって、これらは Σ_1 に関して共に内側(または外側)にある.

<u>Type 1</u>: 0-ハンドルが1個(Σ_1 とする), 本質的ハンドル

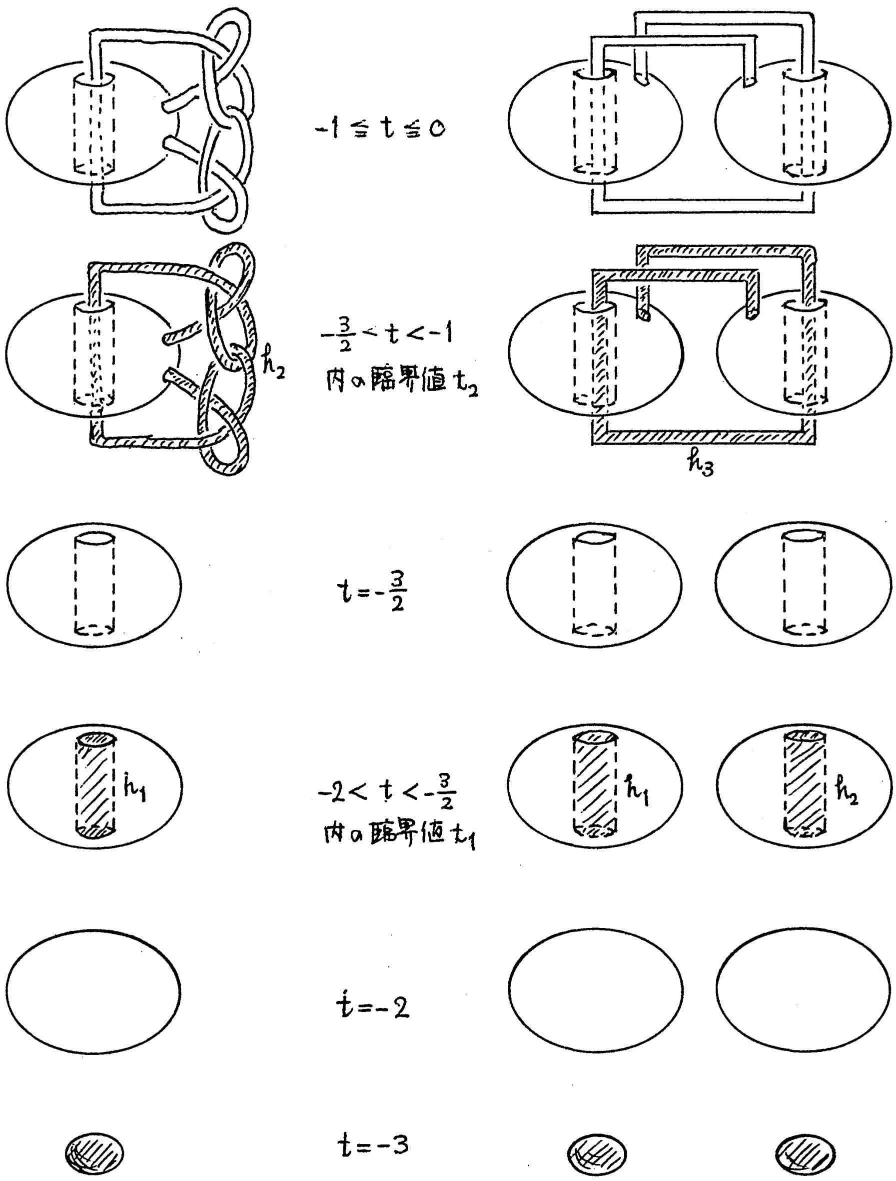
が2個（h_1, h_2とする）あって，h_1が内側，h_2が外側にあり，h_1とh_2は独立（i.e. $h_1(D^1\times D^2)\cap h_2(D^1\cap D^2)=\emptyset$）である。

<u>Type</u> 2：0-ハンドルが1個（Σ_1とする），本質的ハンドルが2個（h_1, h_2とする）があって，h_1が内側，h_2が外側にあり，h_2はh_1を通る（i.e. $h_1(\{0\}\times \mathring{D}^2)\cap h_2(D^1\times\{0\})\neq\emptyset$）。

<u>Type</u> 3：0-ハンドルが2個（Σ_1, Σ_2とする），本質的ハンドルが2個（h_1, h_2とする），繋ぎハンドルが1個（h_3とする）があって，h_1とh_2は独立で，h_3はh_1とh_2の両方を通る。（従ってh_1とh_2は内側にあり，h_3は外側にあって，$h_1(\partial D^1\times D^2)\subset\Sigma_1$，$h_2(\partial D^1\times D^2)\subset\Sigma_2$としてよい。）



<u>Type</u> 0　　　　<u>Type</u> 1



Type 2　　　　Type 3

0-ハンドル$\longleftrightarrow$3-ハンドル，ハンドル$\longleftrightarrow$ドーム と対応させて，$M^3 \cap R^4_+$ を全く対称的にながめると，$M^3 \cap R^4_+$ も同様の4種の型に分類される。従って，$M^3 \cap R^4$ 全体をながめると，

0-ハンドル→ハンドル→ドーム→3-ハンドル　の出方は16通り（ハンドルとドームの側まで考えれば16×2通り）あるが、$\mathbb{R}^3\times\{0\}$ に関する対称性と，補題2.2 を考慮して整理すれば，次の6通りとなる。

	$M^3\cap\mathbb{R}^4_-$	$M^3\cap\mathbb{R}^4_+$
Type (0,0)	Type 0	Type 0
Type (0,3)	Type 0	Type 3
Type (1,1)	Type 1	Type 1
Type (1,2)	Type 1	Type 2
Type (2,2)	Type 2	Type 2
Type (3,3)	Type 3	Type 3

次が本稿の主定理である．

2.5. <u>主定理</u>：ホモロジー球面 M^3 が，$G(M^3\subset\mathbb{R}^4)=2$ なる整列埋込み $(M^3\subset\mathbb{R}^4)$ を持つならば，Type(0,0)，Type(1,1) または Type(1,2) の整列埋込み $(M^3\subset\mathbb{R}^4)$ が存在する。特に，Type(0,0) の整列埋込みを持つならば，$M^3\cong S^3$ である。◀

定理の最後の主張は，永瀬[4, p.138, 命題4]と本質的に同じものなので，証明は省略する。前半は，場合分けして次節で行う。

§3. 主定理の証明

Type (0,3), Type (3,3), Type (2,2) の整列埋込みの各々について、残りの Types の整列埋込みの存在を証明する。

3.1. 定理：ホモロジー球面 M^3 が、Type (0,3) の整列埋込み ($M^3 \subset \mathbb{R}^4$) を持つならば、M^3 は Type (0,0) の整列埋込みを持つ（従って、$M^3 \cong S^3$）。

証明：定義した用語の関係で、便宜上 Type (3,0) の場合に証明する。また、$M^3 \subset \mathbb{R}^4 \subset S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ で考える。

2つの2次元球面 $M_{-2} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ の内側から、本質的ハンドル h_1 と h_2 がそれぞれ Σ_1 と Σ_2 に付加されている。そして Σ_1 と Σ_2 を繋ぐハンドル h_3 が外側にあって、$h_1(\{0\} \times D^2)$ と $h_2(\{0\} \times D^2)$ を通る。指数1の臨界値を t_1, t_2, $-2 < t_1 < -\frac{3}{2} < t_2 < -1$, とする。

M_0 の内側と外側をそれぞれ V, W とおく。仮定と、補題2.2から、2つの本質的ドーム d_1, d_2 は共に V 側にあってかつ独立だから、$V \cong D^2 \times S^1 \natural D^2 \times S^1$ —— すなわち h_1 と h_2 は共に unknotted である。そこで M^3 の別の整列埋込み ($\tilde{M}^3 \subset \mathbb{R}^4$) を次のように構成する：$\tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}^3 \times (-\infty, t_2) = M^3 \cap \mathbb{R}^3 \times (-\infty, t_2)$ とし、$\mathbb{R}^3 \times \{t_2\}$ でハンドル h_3 の代りに、新しい繋ぎハンドル $\tilde{h}_3$ を、外側にあって、h_1 と h_2 を通らないように付加する。この結果新しい閉曲面 $\tilde{M}_0 \subset S^3_0$ を得るが、構成から同相写像 φ:

$M^3 \cap \mathbb{R}^4_- \longrightarrow \tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}^4_-$ を，各 t, $-\infty < t \leq 0$, について，$M^3 \cap \mathbb{R}^3 \times \{t\} \longrightarrow \tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}^3 \times \{t\}$ なるように作ることは容易である。$\tilde{M}_0$ の内側，外側をそれぞれ $\tilde{V}$, $\tilde{W}$ とおけば，h_1 と h_2 が unknotted であることと，h_3' が h_1, h_2 と独立であることから，$\tilde{V} \cong D^2 \times S^1 \natural D^2 \times S^1 \cong \tilde{W}$ となる。よって，各 t について，同相写像 φ は M_t の内部から $\tilde{M}_t$ の内部への同相写像に拡張できる。従って特に，$\varphi(a_1)$ と $\varphi(a_2)$ は，$\tilde{V}$ で円板を bound する。すなわち $\varphi(a_1)$ と $\varphi(a_2)$ を a-spheres とする本質的ドーム d_1' と d_2' が存在するから，φ を拡張して，$\varphi: M^3 \cap \mathbb{R}^4_+ \longrightarrow \tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}^4_+$ なる M^3 の整列埋込み$(\tilde{M}^3 \subset \mathbb{R}^4)$ を得る。h_3' が h_1 と h_2 とは独立だから，$(\tilde{M}^3 \subset \mathbb{R}^4)$ を利用して，Type (0,0) の整列埋込みは容易に構成できる。◀

3.2. <u>定理</u>：ホモロジー球面 M^3 が，Type (3,3) の整列埋込み $(M^3 \subset \mathbb{R}^4)$ を持つならば，M^3 は Type (0,0) の整列埋込みを持つ（従って $M^3 \cong S^3$）。

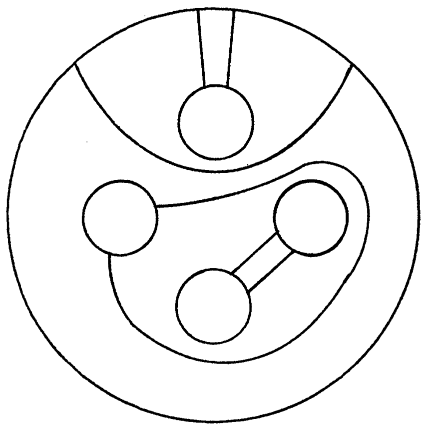
<u>証明</u>：前と同じように，$M^3 \subset \mathbb{R}^4 \subset S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ で考える。

2つの2次元球面 $M_{-2} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ の内側から，臨界値 t_1, $-2 < t_1 < -\frac{3}{2}$, で本質的ハンドル h_1 と h_2 がそれぞれ Σ_1 と Σ_2 に付加されている。臨界値 t_2, $-\frac{3}{2} < t_2 < -1$, で繋ぎハンドル h_3 が外側に出て，$h_1(\{0\} \times D^2)$ と $h_2(\{0\} \times D^2)$ を通る。M_0 の内側，外側をそれぞれ V, W とおくと，V は仮定から，ハン

ドル h_1 と h_2 の cores に対応する S^3 における結び目の閉補空間 K_1 と K_2 の境界連結和 $K_1 \natural K_2$ と同相である。

さて仮定から、$M^3 \cap \mathbb{R}^4_+$ も Type 3 であるから、臨界値 t_3, $1<t_3<\frac{3}{2}$, で繋ぎドーム d_1 が、臨界値 t_4, $\frac{3}{2}<t_4<2$, で本質的ドーム d_2, d_3 が付加されるとしてよい。補題2.2から、d_2, d_3 は共に内側にあり、d_1とは交わるから、d_1 は外側、すなわち W にある。

円板 $A_1 = d_1(D^2\times\{0\})$ と、いくつかの穴のあいた2つの円板 $\tilde{B}_1 = Cl(h_1(\{0\}\times D^2) - h_3(D^1\times D^2))$, $\tilde{B}_2 = Cl(h_2(\{0\}\times D^2) - h_3(D^1\times D^2))$ の交線を S^3_0 で考える。W は irreducible だから、$A_1\cap(\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2)$ のうち単純閉曲線は A_1 を isotopy で変形して除去できるし、$\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2$ 上で円板($\cong D^2$) を切り取る単純弧も同様にして除去できる。従って、$A_1\cap(\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2)$ は各 $\tilde{B}_i$ 上では下図のような単純弧から成ることがわかる。これらの弧が A_1 上で切り取る



円板のうちの最小のものを利用して、繋ぎハンドル h_3 に適当に handle-isotopy を施すことにより、$A_1\cap(\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2)$ の弧の数を少くできる・・・すなわち $A_1\cap(\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2)=\phi$ にできる。よって $a_1=\partial A_1$ と $b_1\cup b_2$ とも素であ

る。M_0 上で $a_1 \sim 0$，$a_1 \not\simeq 1$ だから，$a_1 \approx b_3$ である。ここで $\sim$ はホモローグ，$\simeq$ はホモトープ，$\approx$ はイソトープを示す。従って b_3 は W で可縮だから，M_0 の S^3_0 における ambient isotopy で，h_3 は h_1 と h_2 を通らないように変形できるから，$M^3 \cap R^4_-$ が Type 0 の整列埋込みを持つことになり，定理 3.1 と合せて，定理 3.2 の証明が完了する。◀

3.3. 定理：ホモロジー球面 M^3 が，Type $(2,2)$ の整列埋込み $(M^3 \subset R^4)$ を持つならば，M^3 は Type $(1,1)$ または Type $(1,2)$ の整列埋込みを持つ。

証明：$M^3 \subset R^4 \subset S^4 = R^4 \cup \{\infty\}$ で考察するのが便利である。

2次元球面 $\Sigma_1 = M_{-2}$ の内側から，臨界値 t_1，$-2 < t_1 < -\frac{3}{2}$，で本質的ハンドル h_1 が付加され，外側から臨界値 t_2，$-\frac{3}{2} < t_2 < -1$，で本質的ハンドル h_2 が付加されると考えてよい。しかも今 h_2 は h_1 を通る。仮定と補題 2.2 から本質的ドーム d_1，d_2 の 2 つがある。臨界値 t_3，$1 < t_3 < \frac{3}{2}$，で d_1 が，臨界値 t_4，$\frac{3}{2} < t_4 < 2$，で d_2 が付加され，M_0 に関して異なる側にある。M_0 の内側を V，外側を W とおくと，仮定から V は ハンドル h_1 の core に対応する S^3 内の結び目の閉補空間と $D^2 \times S^1$ の境界連結和 $K \natural D^2 \times S^1$ と同相である。二つの場合に分けて考察しよう．

場合Ⅰ：d_1 が外側，i.e. $A_1 = d_1(D^2 \times \{0\})$ が W にあるとき：定

理3.2 の証明と同じように，円板 $A_1 = d_1(D^2 \times \{0\})$ と，いくつかの穴のあいた円板 $\widehat{B}_1 = Cl(h_1(\{0\} \times D^2) - h_2(D^1 \times D^2))$ の交線を W で考察する。W は irreducible だから，単純閉曲線と $\widehat{B}_1$ 上で円板を切り取る単純弧が除去できて，$A_1 \cap \widehat{B}_1$ の交線は，3.2 の証明中の図と同様になる。$A_1 \cap \widehat{B}_1$ の弧が A_1 上で切り取る円板のうち最小のものを利用して，ハンドル h_2 に適当に handle-isotopy を施すことにより，$A_1 \cap \widehat{B}_1$ の弧の数を少くできる・・・すなわち，$A_1 \cap \widehat{B}_1 = \phi$ にできる。よって，$a_1 = \partial A_1$ と b_1 は素である。従って特にこのとき，ハンドル h_2 も h_1 を通らなくなる。というのは，a_1 は必然的に（あるいは補題2.3 から）b_2 を homological に消去するドームの a-sphere で，$b_2 \cap a_1 \neq \phi$ からである。よって，ハンドル h_2 を $R^3 \times \{t_2\}$ で動かすことにより，h_1 を通らないようにできる・・・ h_1 と h_2 は独立・・・ので，$M^3 \cap R^4_-$ は Type 1 の整列埋込みを持つことになる。

場合II： d_1 が内側，i.e. $A_1 = d_1(D^2 \times \{0\})$ が V にあるとき：K_1 が $D^2 \times S^1$ と同相でないならば，K_2 は ∂-irreducible であるから [9, Cor. 3.6] または Tsukui [11, p.101, (6.3), (6.4)] により $a_1 = \partial A_1$ は M_0 上で b_2 とイソトープになり，従って，$a_1 \cap (b_1 \cup b_2) = \phi$ とできる。これは当然，homological に b_1 も b_2 をも消去できず，M^3 がホモロジー球面であるという仮定に

反する。よって $K \cong D^2 \times S^1$, i.e. ハンドル h_1 は unknotted であることがわかる。特に $V \cong D^2 \times S^1 \natural D^2 \times S^1$ である。

A_1 は V の meridian-disk で, $M_0(d_1) = M^3 \cap \mathbb{R}^3 \times \{\frac{3}{2}\} = M_{\frac{3}{2}}$ は種数 1 の閉曲面で, $S^3_{\frac{3}{2}}$ の内側は V の性質から $D^2 \times S^1$ と同相, 外側も $A_2 = d_2(D^2 \times \{0\})$ が存在するから $D^2 \times S^1$ と同相になる。従って V の meridian-disk C が存在し, $C \cap A_1 = \phi$, $\partial C \cap a_2$ は唯一つの交叉点から成る。

これらの性質を用いて, M^3 の別の整列埋込み $(\tilde{M}^3 \subset \mathbb{R}^4)$ を次のように構成する: $\tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}^3 \times (-\infty, t_2) = M^3 \cap \mathbb{R}^3 \times (-\infty, t_2)$ とし, $\mathbb{R}^3 \times \{t_2\}$ で、ハンドル h_2 の代りに, 新しい本質的ハンドル h_2' を, h_1 を通らず, しかも新しい閉曲面 $\Sigma_1(h_1, h_2') = \tilde{M}_0$ の外側 $\tilde{W}$ が $D^2 \times S^1 \natural D^2 \times S^1$ と同相になるように, 付加する。この結果 3.1 の証明と同じように, 同相写像 $\varphi : M^3 \cap \mathbb{R}^4_- \longrightarrow \tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}^4_-$ を各 t, $-\infty < t \leqq 0$, について, $M^3 \cap \mathbb{R}^3 \times \{t\} \longrightarrow \tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}^3 \times \{t\}$ なるように作ることが出来る。$\tilde{M}_0$ に関する内側 $\tilde{V}$ は $D^2 \times S^1$ と同相だから, φ は各 t について, M_t の内部から $\tilde{M}_t$ の内部への同相写像に拡張される。従って, $\varphi(a_1)$ は $\tilde{V}$ で円板を bound するから, 求める $\tilde{M}^3$ の埋込みを, $\tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}^3 \times (-\infty, \frac{3}{2}]$ まで作ることが出来る。$\tilde{M}_{\frac{3}{2}} = \tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}^3 \times \{\frac{3}{2}\}$ は, $\tilde{M}_0$ の作り方から, 種数 1 の閉曲面で, 特にその $S^3_{\frac{3}{2}}$ の内側, 外側とも $D^2 \times S^1$ と同相である。ところで $\varphi(a_2)$ は一般に $\tilde{M}_{\frac{3}{2}}$ の longitude と交

わっているが，必要ならば h_2' のひねり，本間[2, p.93]を適当に施すことに，homology intersection number は 0 に出来る（実際，$\varphi(a_2)$ と $M_{\frac{3}{2}}$ の meridian との homology intersection number が 1 だから）。従って $D^2\times S^1$ の特性から，$\varphi(a_2)$ は $M_{\frac{3}{2}}$ の外側で円板を bound することになり，φ を使って求める $\tilde{M}^3$ をすべての t について完成することができる。勿論 $(\tilde{M}^3\subset\mathbb{R}^4)$ は Type (1, 2) ではあるので，証明は完了する。◀

〈注〉 定理3.3 の証明の場合Ⅱで，d_1 と d_2 を独立に出来るとは限らない。しかし，d_2 を変えることにより，a_2 と b_1 の homology intersection number を 0 にすることは，容易に出来る。

参考文献

［1］ Fox, R. H.: On the imbeddings of polyhedra in 3-space, Ann. of Math. (2), **49** (1948), 462-470.

［2］ 本間龍雄：Heegaard分解と曲面上の曲線系について，数理解析研講究録 219（Knotting problem について），1974, pp. 90-102.

［3］ Magnus, W.- Karrass, A.- Solitar, D.: Combinatorial Group Theory, Interscience Pub., 1966.

［4］ 永瀬輝男：4次元ユークリッド空間内の特殊なホモ

ロジー 3-球面についての一考察，数理解析研講究録 152 (Combinatorial Topology), 1972, pp. 130-153.

[5] Nagase, T.: An example of homology 3-sphere, ibid, pp. 154-159.

[6] Rourke, C. P. - Sanderson, B. J.: Introduction to Piecewise-Linear Topology, Springer, 1972.

[7] Suzuki, S.: Linear graphs in 3-sphere, Osaka J. Math., 7 (1970), 375-396.

[8] ―――― : On a complexity of a surface in 3-sphere, Osaka J. Math., 11 (1974), 113-127.

[9] ―――― : On surfaces in 3-sphere: Prime decompositions, Hokkaido Math. J., (to appear)

[10] 寺阪英孝：閉曲面上の閉曲線群について，数理解析研講究録 219 (Knotting problem について), 1974, pp. 70-89.

[11] Tsukui, Y.: On surfaces in 3-space, Yokohama Math. J., 18 (1970), 93-104.