数理解析研究所講究録
第245巻 1975年 17-30

測度空間の力学系

名大 理　　久保 泉

古典力学系の特徴の内，位相的な軌道の性質や幾何学的な性質に注目，抽象化して位相空間の力学系，多様体上の力学系の研究が進められて行ったのに対して，Liouville の定理が保証する不変測度に着目して測度空間の力学系の研究が進められて来た。そのように測度を附随させて力学系を考察することの意義は討論に委ねることにして，歴史的には，三つの要因があったと考えられる。第一は，Bernoulli, Laplace に始まる確率論の研究，特に大数の法則・中心極限定理である。第二は，その影響を受けて Boltzmann = Maxwell が統計力学の基礎のために導入したエルゴード仮説である。第三は，Poincaré 等の天体力学における再帰定理である。その後何が問題とされ，何が解決されたかを見て行きたいが，全てに渡っては不可能であるから，奇しくも１９７０年に解決された二つの問題を中心に述べよう。他の問題や，他分野の研究との関連等については，最後につけた表を参照して頂きたい。

＜ 1 ＞　同型問題

一般的に言って"同型"もしくは"分類の問題は数学のあらゆる場合に設定される一つの問題形式であるが，確率論の立場からは別の期待があった。それは，定常過程の表現の問題と呼ばれ，与えられた定常過程を既知の（例えば，Bernoulli）確率過程で表現することによって，確率論固有（予測，濾波，通信　等）の問題に役立てようと考えた。しかし，同型問題が解決されつつある今になって見れば，同型対応の予想以上の複雑さから，その望みが断れている。同型問題の一面として表現問題があるがそれは，Birkhoff の symbolic dynamics；　Ambrose，Kakutani，Rohlin の special flow による表現；　Maruyama の定常過程による表現、Jacobs 等による位相的に良い性質をもった表現を列挙するにとどめておく。　同型定理で最初に成功を得たのは v. Neumann（１９３２）であった。

定　理　純点スペクトルをもつエルゴード的系は，スペクトルが一致すれば同型である。　更にそれ等は，コンパクト可換群の shift と同型である。

この定理はスペクトル（即ち，$U_t f(x) = f(T_t x)$ で定義されるユニタリー作用素のスペクトル）が　力学系もしくは，変換の完全な不変量（即ち　分類を完全に決定する）ではない

かという期待をいだかせた。 特に

<u>定 理</u>　Bernoulli 変換，トーラス上の群自己同型がσ－ルベーグ・スペクトルを持つ。

が知られ，　Gelfand＝Fomin（1952），Kakutani（1950）によって

<u>定 理</u>　負定曲率空間の測地的flow と Brown運動のflow はσ－ルベーグ・スペクトルを持つ。

が示され，それ等はそれぞれ，同型であることが信ぜられた。一方，Anzai（1951）が skew 積を使って，一般にはスペクトルが完全な不変量ではないこと示した。 更に，Kolmogorov（1958）が Shannon（1948）の情報理論からヒントを得て，変換のエントロピーの概念を導入してBernoulli 変換が更に細く分類されることを示した；

<u>定 理</u>　エントロピーは不変量である。 Bernoulli 変換のエントロピーは $-\sum p_i \log p_i$.

更に彼は，Doob（1949）の martingale 定理に影響され，Kolmogorov（K－）性の概念を定義した。 Rohlin，Sinai，Pinsker 等，ソ連の研究者によって，K－変換が詳しく研究され，それが確率論，数論，群論，幾何学的に重要な変換の class を含むことが知られて来るに連れて，エントロピーの等しいK－変換は同型であると期待されるに至

った。ちなみに，Bernoulli 変換，群自己同型はK-変換であり，負定曲率空間の測地的 flow，Brown 運動の flow は，K-flow である。又，K-変換（flow）は正のエントロピーを持ち，σ-ルベーグ・スペクトルを持つ。Sinai（1962）は

<u>定理</u>　エルゴード的な変換は，それと等しいエントロピーを持つ Bernoulli 変換に準同型である。エントロピーの等しい Bernoulli 変換は弱同型（互に他に準同型）。

を示した。事際に，Meshalkin（1959）によって，特殊な Bernoulli 変換に関し同型対応が発見され，Adler＝Weiss（1967）が topological エントロピーを使って，トーラス上の群同型変換を，エントロピーが完全に分類することを示した。これ等の研究の上に立って，Ornstein（1970）は

<u>定理</u>　エントロピーの等しい Bernoulli 変換は，同型である。Bernoulli 変換から準同型写像に導かれる変換は Bernoulli 変換である。

こと示した。更に，weakly Bernoulli，very weak Bernoulli と呼ばれる変換の class に対して，エントロピーが完全不変量であることが示され，トーラス上の群自己同型変換，マルコフ変換，Anosov 系，f-変換，格子力学系

等重要な class で，Bernoulli 変換と同型であることが知られ，更に flow の場合も，compact 負曲率空間の測地的 flow，Anosov 系，Sinai 撞球系，Brown 運動の flow 等が，Bernoulli flow であることが示された。それのみならず，K－変換で Bernoulli と同型でないものの存在も知られている。

〈2〉 エルゴード仮説

エルゴード仮説は，閉込められた気体の分子の運動において，時間平均＝空間平均 という性質が成立するという主張であるが Boltzmann，Maxwell が大数の法則の影響をうけてこの仮説を唱て以来，未解決であるが，エルゴード諸定理を生出す源となった。初期の段階で，Orbit が稠密であればよいと考えられ，位相的な性質が研究されたが，それには，反例が示されたことは良く知られている。或は，殆んどの変換（flow）が仮説を充せば良い（何故ならば実際の現象として現われるのはそのようなものだから）という立場から，適当な測度空間上の保測変換全体に，適当な位相を入れて，エルゴード的なものが稠密なことを示そうという研究が，Oxtoby，Halmos 等によってなされたが深くは立入らないでおきたい。

古典的な運動に附随した系で最初に成功したのはWeyl（1914，1938）であった。

定理　Weylの撞球系はエルゴード的である。

これは，彼の数論の研究の結果から導かれたものであり，更に〈1〉のNeumannの仕事に現われるものである。その後，Birkhoff（1931）が最も基本的な仕事；個別エルゴード定理

定理　時間平均は殆んど全ての点で存在する。

を示した。続いて，Koopmann（1931），Neumann（1932）がL^2-空間のunitary作用素として，変換（flow）を取扱い，L^2-空間での時平均の存在，平均エルゴード定理を示し，後のBanach空間のcontraction作用素のエルゴード定理の研究への端緒となった。Seidel（1933）は数論的変換（10進変換，従ってBernoulliと同等）に対してエルゴード性を示した。更に，Seidel（1935），Hedlund（1935，9），Hopf（1936，8）等がFuchsian群に関連した変換及びflowのエルゴード性を研究した。特に，Hedlund，Hopfの

定理　定負曲率空間の測地的flowはエルゴード的。

は，ある種の古典力学系をモデルに持つものだけに，問題本来の意味から言っても重要である。ついでに記しておけ

ば，Gelfand = Fomin（１９５２）がσ－Lebesgueスペクトルを示し，Sinai（１９６０）がＫ－系であること示した。Hopf（１９３９，４０）は

<u>定　理</u>　コンパクト負曲率空間の測地的flowはエルゴード的である。

ことを示したが，そこで使われた手法は後のAnosov，Sinaiの A－系の研究に強い影響を与えたと考えられる。〈１〉で述べたKolmogorovの仕事の上に立ってAnosov（１９６２）はA－系を導入し，Sinaiと等に

<u>定　理</u>　A－系はエルゴード的で，Ｋ－系である。

ことを示した。一方　Sinai（１９６３）は古典力学系の幾つかが，A－系もしくはそれに近い振舞いをすることを発見し

<u>主　張</u>　ある種の二粒子間相互作用を持つ直方体の箱に閉込められた多粒子系はエルゴード的であり，Ｋ－系。

を発表したが，その証明は発表されず，１９７０年

<u>定　理</u>　Sinaiの撞球系はエルゴード的，Ｋ－系。

の証明を与えた。　Sinaiの撞球系は，上の主張の内で，二粒子，弾性衝突，トーラス上と，最も単純化した場合である。　しかし，この力学系は，エルゴード仮説の提唱当初から要求されたような問題に対する始めての解答である。

＜３＞　１９７０年後の話題.

。　＜１＞で述べた如く，種々の重要な系に対して，Bernoulli と同型であることが示された。　例えば，Sinai の撞球系は Bernoulli flow である。　手がつけられず，問題とされているのは，K－系を分類することである。

。　統計力学で格子系の研究が詳細に行われ，素晴しい発展をとげつつあるが，そこで使われた自由エネルギーが，トポロジカル・エントロピーの自然な拡張であることに着目その概念を移入して，topological dynamics，f－変換，Markov 変換，A－系の同型問題に利用している。

。　例えば，上の場合にも，同型対応の具体的な在方が注目されている。

。　作用素環，統計力学の研究と結びついて，不変測度を持たない変換の研究が行われている。

。　統計力学のモデルとも関連して，無限粒子の力学系の構成，不変測度，エルゴード性，K－性，Bernoulli 性が研究されている。　それには

　　無限粒子の古典力学系

　　無限粒子の確率過程

の二種がある。

〈４〉　附録　諸定義

○　T（resp. $\{T_t\}$）を保測変換（resp. flow）とする。

Tがエルゴード的 $\Leftrightarrow$ $\forall f \in L^1$ に対し，$\forall x$ に対し

$$\frac{1}{\mu(X)}\int f(x)d\mu = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(T^k x) \quad \left(\text{resp.} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_0^N f(T_t x)dt\right)$$

○　測度空間（$X, \mathfrak{m}_X, \mu$）及び（$Y, \mathfrak{m}_Y, \nu$）上の保測変換T及びS（resp. $\{T_t\}$；$\{S_s\}$）が同型である $\Leftrightarrow$

（$X, \mathfrak{m}_X, \mu$）から（$Y, \mathfrak{m}_Y, \nu$）への 1：1 onto,

$\varphi\mathfrak{m}_X = \mathfrak{m}_Y$，$\mu(A) = \nu(\varphi A)$ なる写像 φ が存在して.

$$\varphi T \varphi^{-1} = S \quad (\text{resp. } \varphi T_t \varphi^{-1} = S_t \quad \forall t).$$

○　上と同じ仮定の下で，準同型とは，（$X, \mathfrak{m}_X, \mu$）から（$Y, \mathfrak{m}_Y, \nu$）への one-to-many，$\varphi^{-1}\mathfrak{m}_Y \subset \mathfrak{m}_X$，$\mu(\varphi^{-1}B) = \nu(B)$ なる（準同型）写像 φ が存在して，

$$\varphi T = S\varphi \quad (\text{resp. } \varphi T_t = S_t\varphi \quad \forall t)$$

○　$f \in L^2(X, \mathfrak{m}, \mu)$ に対し，$Uf \equiv f(Tx)$（resp. $U_t f \equiv f(T_t x)$）で unitary 作用素（resp. の一径数群）を定義し，そのスペクトルを T（$\{T_t\}$）のスペクトルと呼ぶ。

エルゴード的である必要充分条件は，そのスペクトルの，原点の重複度が１であることである。

純点スペクトルである $\Leftrightarrow$ 点スペクトルのみをもつ。

σ－ルベーグ・スペクトル $\Leftrightarrow$ スペクトルが（原点の一

重を除外して）Lebesgue 測度と互に絶対連続で重複度が∞重。

○　可算集合 $I = \{1, 2, \cdots\}$ とその上の確率 $P = \{p_i\}$ を考え，I_n，P_n をそれ等のコピーとし，$X \equiv \prod_{n=-\infty}^{\infty} I_n$，$\mu \equiv \prod_{n=-\infty}^{\infty} P_n$，$(Tx)_n \equiv (x)_{n-1}$ なる変換Tを Bernoulli 変換という。

Tのエントロピーは $h(T) = -\sum p_i \log p_i$ である。

○　Gをコンパクト・可換群，μ を Haar 測度とする。Gの元 g（resp. 一径数部分群 $\{g_t\}$）を使って，

$$T h \equiv g h \qquad (\text{resp. } T_t h \equiv g_t h)$$

で定義される変換（flow）を群の shift と呼んでいる。

Gの群自己同型変換 φ は Haar 測度を不変にする。この φ のエルゴード性は，Gの character 群 $\hat{G}$ での $\hat{\varphi}$（φ の dual）の働きで決定される。例えば，Gがトーラスのときは，φ は，$SL(n, \mathbb{Z})$ の元であり，エルゴード性の判定は容易である。又，エルゴード的なら典型的なA－系である。

○　f－変換とは，$f(x)$ を $[0, 1)$ 上の関数とし

$$T x = \{f(x)\} \qquad x \in [0, 1)$$

で $[0, 1)$ 上の変換を定義する，但し $\{t\}$ は t の小数部分を表わす，ときのTを言う。特に，$f(x) = 10x$ が，Seidel の10進変換である。

○　$\alpha = \{A_i\}$ をXの可算分割とするとき，α のエントロピーを $H(\alpha) \equiv -\sum_i \mu(A_i) \log \mu(A_i)$ で定義する。

$T^k\alpha \equiv \{T^k A_i\}$とおき，$\alpha \vee T\alpha \vee \cdots \vee T^{n-1}\alpha$を夫々の共通分割への細分とする。Tのエントロピー$h(T)$は

$$h(T) \equiv \sup_{\alpha;\text{有限分割}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee T\alpha \vee \cdots \vee T^{n-1}\alpha)$$

で定義される。

◦ TがK－変換である $\Leftrightarrow$ 分割ξが存在し

$T\xi > \xi$，$\bigvee_k T^k\xi =$ 各点分割，$\bigwedge T^k\xi = \{X\}$.

K－変換は正のエントロピーとσ－ルベーグ・スペクトルを持ち，その準同型写像による像もまたK－系である。

◦ Weylの撞球系は，直方形（或はトーラス）状の撞球台上の一ケの球の運動である。

◦ Sinaiの撞球系は，直方形（或はトーラス）内に幾つかの凸状の障害物が置れた場合の一粒子の運動である。

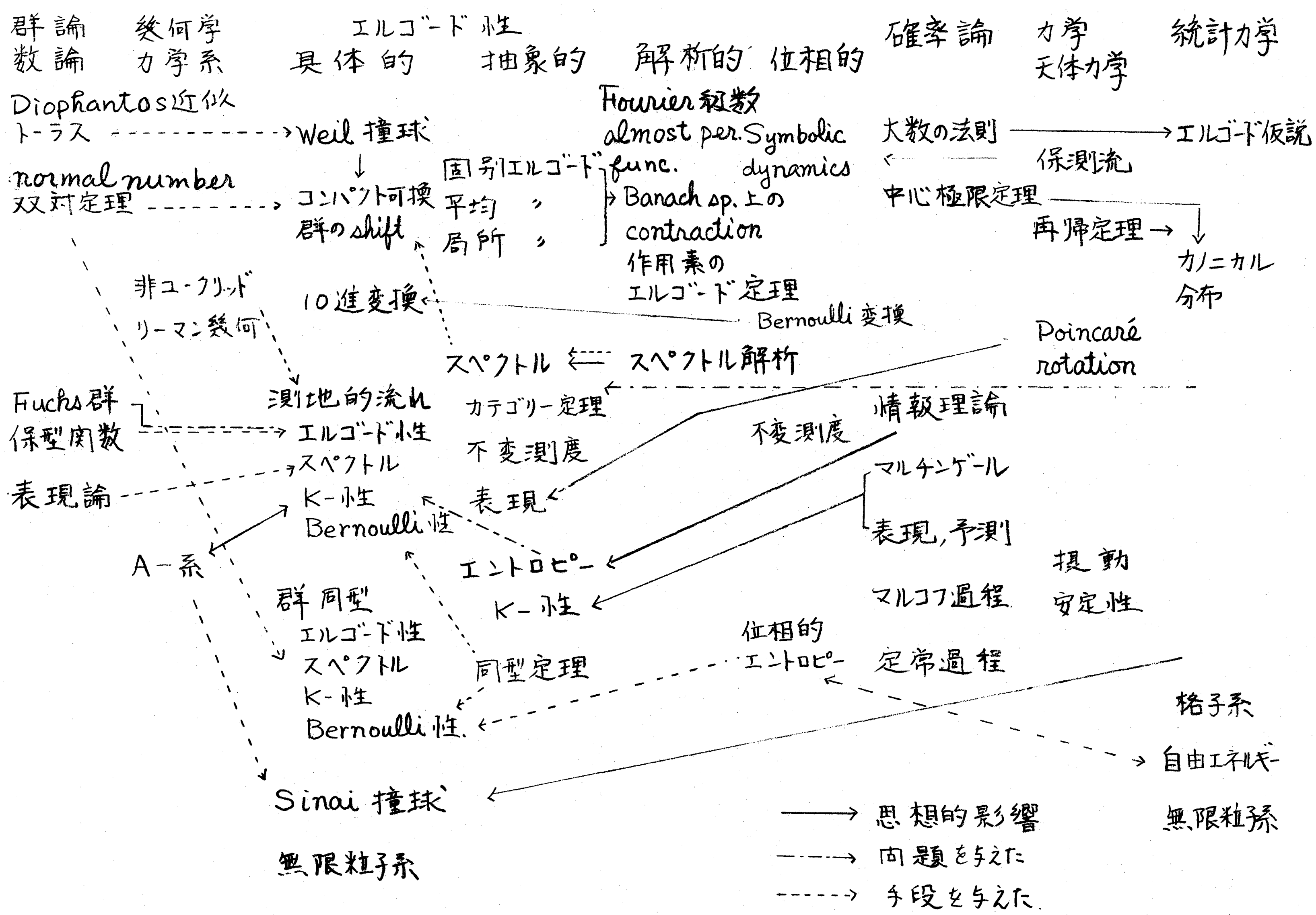
◦ 測地的flowとはRiemann多様体Q上におかれた粒子がspeed 1で測地線に沿って運動する系である。

Weyl，Sinaiの撞球系も測地的flowの一種である。

1950	Doob (Martingale) Kakutani (Brown運動のスペクトル) Ito	Kolmogorov (摂動)		Gelfand, Fomin (測地的flowのスペクトル) Rohlin, Sinai, Pinsker	Anzai (Skew 積) Kolmogorov (エントロピー, K-性) Meshalkin (Bernoulli)		Yoshida (エルゴード定理) Élsgolć
1960	Sinai (測地的flowの中心極限定理) Kolmogorov (乱数)	Arnold (摂動) (安定性) Morser Alekseev	Ruelle Robinson Lanford etc.	Sinai (測地flowのK-性) Anosov (A-系) Sinai (多粒子系)	Sinai (弱同型) Adler, Weiss (トーラス上の群同型) Muruyama (M氏 表現)	Adler (top. entropy)	Peixoto Anosov Smale
1970	Bunimovichi (S氏撞球中心極限定理)		(格子系力学) (無限粒子系) (自由エネルギー) etc.	Sinai (S氏撞球) Sinai, Pazis (無限粒子系) Shiga, Takahashi	Ornstein (Bernoulli) Ornstein, Gallavotti (S氏撞球のB-ness)	Takahashi 他	

測度空間の力学系　年表

年代	確率論その他	天体力学	統計力学	エルゴード定理	同型問題	位相力学系 不変測度	その他
	Bernolli Laplace Borel (大数の法則) (中心極限定理)	Poincaré (P氏rotation) (再帰定理)	Boltzmann Maxwell (エルゴード仮説) (カノニカル分布)			Liouville (L-氏定理)	Liapunov
1900		Birkhoff	Gibbs	Weyl (W氏撞球)		Birkhoff (Symbolic dy.)	
1930	Kolmogorov (確率論の基礎)			Birkhoff (個別エルゴード定理) Koopmann Neumann (スペクトル) Seidel (10進変換) Hedlund Hopf (Fuchs群, 測地的 flow)	Neumann (点、スペクトル定理)	Kryloff Bogolouboff (不変測度) Morse・Hedlund (Symbolic Dy.)	Morse Pontrjagin Oxtoby (カテゴリー)
1940	Wiener, Lévy (Brown運動) Shannon (情報理論)	Siegel		Hopf (測地的 flow) Halmos (群 同型)	Ambrose Kakutani (A-氏表現)	Halmos (不変測度)	Halmos



群論
数論
幾何学
力学系
エルゴード性
具体的
抽象的
解析的
位相的
確率論
力学
天体力学
統計力学
Diophantos近似
トーラス
Weil 撞球
Fourier級数
almost per. func.
Symbolic dynamics
大数の法則
エルゴード仮説
保測流
normal number
双対定理
コンパクト可換
群のshift
固別エルゴード
平均 〃
局所 〃
Banach sp.上の contraction
作用素の
エルゴード定理
中心極限定理
再帰定理
カノニカル
分布
非ユークリッド
リーマン幾何
10進変換
Bernoulli 変換
スペクトル
スペクトル解析
Poincaré
rotation
Fuchs群
保型関数
測地的流れ
エルゴード性
スペクトル
K-性
Bernoulli性
カテゴリー定理
不変測度
不変測度
情報理論
表現論
表現
マルチンゲール
表現, 予測
エントロピー
摂動
安定性
A-系
K-性
マルコフ過程
群同型
エルゴード性
スペクトル
K-性
Bernoulli性
同型定理
位相的
エントロピー
定常過程
格子系
自由エネルギー
Sinai 撞球
無限粒子系
無限粒子系
思想的影響
問題を与えた
手段を与えた