数理解析研究所講究録
第 245 巻 1975 年 100-112

Skew Product Dynamical System
—Sacker-Sell の論文紹介を中心に—

東北大 理学部 加藤順二

1. Introduction. dynamical system (flow)が自励系の微分方程式の解をモデルとしていることはよく知られている. それに対して、非自励系

(1) $$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x \in X$$

の解を flow としてとらえようとする試みがいくつかなされている. もっとも簡単な考え方は, 従属変数を1つ増やして自励系

(2) $$\frac{dx}{dt} = f(s, x), \quad \frac{ds}{dt} = 1$$

の解として定めようとするものである [1 ; p. 8]. それに対して, (1)の右辺が p-periodic (=周期 p の周期関数)であるときは, (1)の解 $\varphi(t, s, x)$ に対して

(3) $$\varphi(t+p, s+p, x) \equiv \varphi(t, s, x)$$

の関係があることに注意して, $\mathbb{R}$ 上の (continuous) flow の代りに $p\mathbb{Z}$ 上の (discrete) flow を導入するのも1つの考え方である [2]。

(2) の解として flow を定めるときすべての軌道は非有界となって従来の結果をそのまま適用しても効果は少ない。一方, $p\mathbb{Z}$ 上の flow ととらえる方法は periodic の場合のみに有効で almost periodic の場合などに拡張することはできない. そこで Miller [3] は almost periodic の場合に相空間を X ではなく $X \times H(f)$ とおいて flow が定められることに気付いた. ここで、$H(f)$ は f の hull である. この考え方は抽象化され拡張されて Sell [4] によって盛んに研究され, Sacker - Sell [5] によって skew product flow の概念に導かれた.

2. Non-autonomous flow と skew product flow.

(1) の (s, x) を初期値とする解 $\varphi(t, s, x)$ をモデルとして, φ が X 上の non-autonomous flow (= NA-flow) であることを, 性質

(i) $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X \to X$, continuous,

(ii) $\varphi(t, t, x) \equiv x$,

(iii) $\varphi(t, s, \varphi(s, r, x)) = \varphi(t, r, x)$.

によって定める. 一方, X 上の flow φ は周知のように,

(i) $\varphi : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$, continuous,

(ii) $\varphi(0, x) = x$,

(iii) $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t+s, x)$

によって定められている。

$Y \times X$ 上の flow π は，適当にえらばれた Y 上の flow σ_π に対して，分解

$$\pi(t, y, x) = (\sigma_\pi(t, y), \varphi_\pi(t, y, x))$$

が可能であるときに，$Y \times X$ 上の skew product flow (= SP-flow) とよばれる。[6] $Y \times X$ 上の SP-flow π が linear であるとよばれるのは，φ_π が x に関して linear，すなわち，X が linear space であって，

$$\varphi_\pi(t, y, x) = \Phi_\pi(t, y) x$$

とおいて，$\Phi_\pi(t, y)$ が有界な X 上の線形作用素となるときである。容易に，

"$Y \times X$ 上の ~~SP~~ linear SP-flow π に対して，Φ_π は invertible で

$$\Phi_\pi^{-1}(t, y) = \Phi_\pi(-t, \sigma_\pi(t, y))$$

である"

ことが証明される。

これらの定義において，$\mathbb{R}$ は任意な topological (abelian) group でおきかえてよいことは明らかである。

"X上の NA-flow φに対して,

$$\pi_\varphi(t,s,x) \triangleq (t+s,\ \varphi(t+s,s,x))$$

とおくと, π_φは $\mathbb{R}\times X$ 上の SP-flow となる"

ことは容易に証明される。このようにして得られたπ_φが(2)に対応する flow にほかならない.

一方, NA-flow φに対して, 作用素 T_τ, $\tau\in\mathbb{R}$ を

$$T_\tau\varphi(t,s,x) \triangleq \varphi(t+\tau,s+\tau,x)$$

によって定めて, $\Pi_\varphi=\{T_\tau;\tau\in\mathbb{R}\}$ とおく. Π_φにおける位相は $C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times X, X)$ 上の作用素として弱位相によって定める. ここで, $C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times X, X)$ の位相は compact-open topology によって与えられている. このとき、

"X上の NA-flow φに対して,

$$\pi^*_\varphi(t,T_s,x) \triangleq (T_{t+s},\ T_s\varphi(t,0,x))$$

とおくと, π^*_φは $\Pi_\varphi\times X$ 上の SP-flow となる."

NA-flow φが(1)から生成されているとき、T_τを作用させることは微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=f(t+\tau,x)$$

をとることに対応しており π^*_φは Miller の与えた flow と一致している.

"NA-flow φに対して,

(i) (3)がすべての $p\in\mathbb{R}$ に対して成り立ってい

るとき、$\Pi_\varphi = \{T_0\}$ となって、$\Pi_\varphi \times X$ 上の SP-flow π_φ^* は X 上の flow と同一視できる。

(ii) (3) が与えられた p に対して成り立っているとき、$\Pi_\varphi = \{T_s ; s \in [0, p)\}$ となってこれは cycle S と同相である。

(iii) 任意な $\{t_k\}$ が $\{\varphi(t + t_{k_j}, s + t_{k_j}, x)\}$ が (広義一様) 収束するような部分列 $\{t_{k_j}\}$ を含むとき、$H_\varphi = \overline{\Pi_\varphi}$ はコンパクトで、$H_\varphi \times X$ 上の SP-flow ρ が存在して、

(4) $$\rho \Big|_{\Pi_\varphi \times X} = \pi_\varphi^*.$$

このとき、H_φ を hull といい、φ は compact hull をもつという。

(iv) compact hull をもった NA-flow φ に対して $T_{t_k} \to S \in H_\varphi$, $T_{-t_k} \to S^* \in H_\varphi$ ならば、常に

$$S^* \circ S = I \text{ (恒等作用素)}$$

が成り立っているとき、(4) で定められた ρ に対して、H_φ は σ_ρ に関して minimal である。

(注) 上で、~~(i) は~~ φ が微分方程式 (1) に対応しているとき、(i), (ii), (iv) はそれぞれ f が自励系, p-periodic almost periodic の場合に対応しており、(iii) は f が $\mathbb{R} \times X$ 上で有界, (狭義) 一様連続であることに対応する。

3. Fiber presearving flow. vector bundle (E, Y, p, X) を考える。すなわち,

E: bundle space

Y: base space

p: projection

X: fiber

に対して、

(i) E, Y は topological space で

$p: E \longrightarrow Y$, continuous, onto,

(ii) $X_y \triangleq p^{-1}(y)$ は vector space

(iii) 任意な $y \in Y$ に対して、y を含む開集合 $G \subset Y$ と

$\tau: p^{-1}(G) \longrightarrow G \times X$, homeomorphism

が存在して, 任意な $\eta \in G$ に対して、

$\tau: p^{-1}(\eta) \longrightarrow \{\eta\} \times X$, isomorphism.

このとき、E 上の flow π が fiber-presearving (= FP-flow)[6] であるとは, Y 上の flow σ が存在して,

$$\xi \in p^{-1}(y) \Rightarrow \pi(t,\xi) \in p^{-1}(\sigma(t,y))$$

が成りえっている, すなわち, (iii) において $G = Y$ ととれるときは, $\tau \circ \pi(t, \tau^{-1}(y,x))$ が $Y \times X$ 上の SP-flow となることを示している.

4. Non-critical flow と saddle property. $Y\times X$ 上の linear SP-flow $\pi = (\sigma_\pi, \varphi_\pi)$ を考える。

$$\mathcal{B} \triangleq \{(y,x)\in Y\times X ;\ \varphi_\pi(t,y,x) \text{ が } \mathbb{R}\text{-bounded}\}$$

とおいて，$\mathcal{B} = Y\times\{0\}$ の場合に π は non-critical であるという．π が FP-flow のときは，この条件は

$$\mathcal{B} \triangleq \{\xi\in E : \pi(t,\xi) \text{ が } \mathbb{R}\text{-bounded}\} = \bigcup_{y\in Y} \tau^{-1}(\{y\}\times\{0\})$$

に対応している．

(5) $\mathfrak{A}^+(y) \triangleq \{x\in X ;\ \varphi_\pi(t,y,x)\to 0\ (t\to\infty)\}$

によって，π の positive attractor の領域を定める．$t\to\infty$ を $t\to-\infty$ でおきかえて，$\mathfrak{A}^-(y)$ が同様に定義される．このとき、

$$X = \mathfrak{A}^+(y)\oplus\mathfrak{A}^-(y)$$

ならば，π は y で saddle property をもつという。

Sacker-Sell [6] は次の定理を証明した。

"Sacker-Sell の定理. $Y\times X$ 上の linear SP-flow π に対して次の仮定をおく．

(a) $\dim X < \infty$,

(b) π は non-critical,

(c) Y は compact,

(d) Y は σ_π に関して minimal.

このとき，π は saddle property をもつ."

Sell-Sacker はかなり複雑な homeomorphism を構成して intersection number を調べることによってこれを証明した．ここでは，微分方程式に対して用いた中島文雄氏（未発表）の idea を用いて，より広く、より簡単な証明を紹介する．まずそのために、次の補題〔6〕を述べる．

"仮定（a），（b），（c）のもとで定数 $K, \alpha > 0$ が存在して，任意な $y \in Y$ に対して，

（6）　$x \in \mathfrak{A}^+(y),\ t \geq s$ あるいは，$x \in \mathfrak{A}^-(y),\ t \leqq s$

$$\Longrightarrow \|\varphi_\pi(t, y, x)\| \leqq K e^{-\alpha|t-s|} \|\varphi_\pi(s, y, x)\|".$$

（注）このことから，saddle property と $\mathbb{R}$上で指数的に dichotomy，すなわち，$P(y)$ を X から $\mathfrak{A}^+(y)$ への射影として，

$$（7）\quad \begin{cases} \|\Phi_\pi(t, y) P(y) \Phi_\pi^{-1}(s, y)\| \leqq K e^{-\alpha(t-s)} & (t \geq s) \\ \|\Phi_\pi(t, y)(I - P(y)) \Phi_\pi^{-1}(s, y)\| \leqq K e^{-\alpha(s-t)} & (t \leqq s) \end{cases}$$

が成り立っていることと同値であることが、条件（a），（c）のもとでわかる（〔6〕および〔7〕参照）．

$\mathfrak{A}^-(y)$ を $\mathfrak{A}^+(y)$ の適当な補空間でおきかえて，$t, s \geqq 0$ に制限して（6）が成り立つことを π は（yで）positively saddle property をもつということにしよう。これは条件（a），（c）のもとで π が（$\mathbb{R}^+$ 上で）指数的に dichotomy をもつ，すなわち，$t, s \geqq 0$ で制限して（7）が成り立つことと

同値である．

このとき、中島の idea による結果は

"$Y\times X$ 上の linear SP-flow π に対して仮定 (a), (b), (c) をおく．このとき，

(i) π は任意な $y\in Y$ で positively saddle property をもつ．

(ii) $\Delta^+(y)$ を σ_π に関する ω-極限集合としたとき $\pi|_{\Delta^+(y)\times X}$ は $\Delta^+(y)\times X$ 上の linear SP-flow となるがこれは saddle property をもつ．

(iii) さらに (d) を仮定すれば，π 自身が saddle property をもつ"

上の結果で (ii) は (i) より比較的容易に導かれる．また (iii) は、仮定 (d) のもとで $\Delta^+(y)=Y$ となることに注意すれば (ii) より直ちに従がう．したがって，仮定 (d) は

$$(d^*)\qquad \cup\{\Delta^+(y)\,;\,y\in Y\}=Y$$

でおきかえても (iii) は成り立つ．さらにこの条件は

(d**) Y における σ_π に関する minimal set の全体が Y の中で dense である

ことを仮定すれば直ちに従がう．

Sacker-Sell はその証明の中で (d) のもとで $\dim \mathcal{O}^+(y)$ は一定であることを証明し、このことがその証明の中で本質

的であった．したがって，直ちに（d）を（d^{**}）でおきかえられることが述べられている．

n次元のcompact manifolds M を base とする tangent bundle （TM, M, p, $\mathbb{R}^n$）上の fiber preseaving flow π を

diffeomorphism $F: M \longrightarrow M$

から生成する：

$$\pi(t,y,x) \triangleq (F^t(y),\ DF^t(y)\cdot x),\quad t\in\mathbb{Z},\ y\in M,\ x\in T_yM.$$

ここで，$T_yM \triangleq p^{-1}(y)$，$F^{t+1}=F\circ F^t$，$F^0=I$，$TF: TM\to TM$ は F の differential である．さらに，

$$\mathcal{B}(y) \triangleq \{x\in T_yM\ ;\ DF^t(y)\cdot x \text{ が } \mathbb{Z} \text{で有界}\}$$

とおく．このとき Sacker - Sell の定理は次の結果を与える．

"$Y=M$，$\sigma_\pi(t,y)=F^t(y)$ とおいて（d^{**}）がみたされているとき，F が Anosov diffeomorphism であるための必要かつ十分な条件は

$$\mathcal{B}(y) = \{T_yM \text{ の } 0\text{-ベクトル}\}$$

が成りたつことである．"

5. Semi - flow. 関数微分方程式の解をモデルとする semi-flow に対して同じ結果が成りたつかという疑問が生ずる．仮定（b），（c）のもとで positively saddle property をもつことを示すためには，次の2点がまず障害となる：

(イ) 関数微分方程式に対しては相空間Xは $C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ でこれは無限次元である。そこで、(5) で定められた $\mathfrak{a}^+(y)$ に対して

(8) $$\operatorname{codim} \mathfrak{a}^+(y) < \infty$$

が成り立っていることが要求されるがこれは不明である.

(ロ) flow の場合と異なって

$$\exists x \neq 0,\ \exists t > 0 \ni \pi(t, y, x) = 0$$

となる場合があることに注意しなければならない.

$\dim \mathfrak{a}^-(y) < \infty$ は成り立っており, また periodic の場合には (8) が成立している。したがって、(8) は常に成り立っていることが予想される。しかし、(ロ) で挙げた問題を解決するためには証明方法そのものを改良しなければならない.

6. REFERENCES.

[1] V. V. Nemytskii and V. V. Stepanov, Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton Univ. Press (1960).

[2] J. P. LaSalle, A study of synchronous asymptotic stability, Annals of Math., 65 (1957), 571–581.

[3] R. K. Miller, Almost periodic differential equations

as dynamical systems with applications to the existence of a. p. solutions, J. Differential Equations, 1 (1965), 337-345.

[4] G. R. Sell, Nonautonomous differential equations and topological dynamics, I, II, Trans. AMS, 127 (1967), 241-262, 263-283.

[5] R. J. Sacker and G. R. Sell, Skew product flows, finite extensions of minimal transformations groups and almost periodic differential equations, Bull. AMS, 79 (1973), 802-805.

[6] R. J. Sacker and G. R. Sell, Existence of Dichotomies and invariant splittings for linear differential systems I, J. Differential Equations, 15 (1974), 429-458.

[7] J. L. Massera and J. J. Schäffer, Linear Differential Equations and Function Spaces, Academic Press (1966)

追補．

non-critical という用語は Hale によるものである．

線型系

(9) $$x = A(t)x + f(t)$$

に対して次の結果はよく知られている：

"$A(t)$, $f(t)$ が p-periodic であるとき，同次線型方程式

(10) $$\dot{x} = A(t)x$$

が non-critical ならば p-periodic な解をもつ"

それに対して，$A(t)$, $f(t)$ を概周期関数として(9)の概周期解を見出す問題を考えたとき，(10)が non-critical であることに加えて，(9)が有界な解をもつことを仮定するのが常であった．

しかしながら，よく知られた結果

"(10)が指数的に dichotomy であれば，有界な関数 $f(t)$ に対して (9) は常に有界な解をもつ"

に注意すると，Sacker-Sell の結果は概周期系に対しても同じ形の結果

"概周期系 (9) が概周期解をもつための充分条件は (10) が non-critical なことである"

を述べることができることを示している．