数理解析研究所講究録
第 246 巻 1975 年 51-55

Lifting compact group actions in fiber bundles

東大 理　服部晶夫

位相群 G の空間 X への作用 $\phi: G\times X \longrightarrow X$ が与えられているとする。位相群 H を構造群とする主バンドル $P \longrightarrow X$ 上の G の作用 $\tilde{\phi}: G\times P \longrightarrow P$ で,

1) $\tilde{\phi}(g, xh) = \tilde{\phi}(g, x)h$, $g\in G$, $x\in X$, $h\in H$,

2)
$$\begin{array}{ccc} G\times P & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ G\times X & \xrightarrow{\phi} & X \end{array}$$
が可換

となるものを ϕ の lifting という。問題は lifting が存在するための判定条件を与えること, 分類を行うことである。これまで知られている結果は Stewart [3], Su [4], 服部ー吉田 [2] がある; いずれも H がトーラス (少くとも可換群) の場合である。本稿では, H がトーラス, G がコンパクトなリー群の場合に, 完全と思われる結果を与える。

群 G の普遍バンドル $EG \longrightarrow BG$ を用いて, $X_G = EG\times_G X$ と定義する。ここで $EG\times X$ への G 作用は対角作用である。

$\pi: EG\times X \longrightarrow X_G$, $p: EG\times X \longrightarrow X$ を射影とする。G作用をもつX上のH-バンドルの同値類全体を $\mathcal{E}_G(X)$, X上のH-バンドルの同値類全体を $\mathcal{E}(X)$ と書く。自然な写像 $\mathcal{E}_G(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$ の像を $\overline{\mathcal{E}}_G(X)$ と書く。また、EGは可縮だから、$p^*: \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(EG\times X)$ は全単射である。そこで $p^{*-1}\circ\pi^*: \mathcal{E}(X_G) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$ の像を $\overline{\mathcal{E}}(X_G)$ と書く。$\overline{\mathcal{E}}_G(X) \subset \overline{\mathcal{E}}(X_G)$ であることは容易にわかる。われわれの主要結果は次の定理である。

定理. 上の状況で、Gはコンパクトリー群、$H=T^n$ (n次元トーラス), Xは連結で局所有限なCW複体であるとする。そのとき、$\overline{\mathcal{E}}_G(X) = \overline{\mathcal{E}}(X_G)$ が成立つ。

XがCW複体ならばPにそのChern類 $c_1(P)\in H^2(X,\mathbb{Z}^n)$ を対応させることにより $\mathcal{E}(X)\cong H^2(X,\mathbb{Z}^n)$ となる ($H=T^n$). このことに注意すれば次の系を得る.

系. 定理において、さらに X_G もCW複体のホモトピー型をもつと仮定する。そのとき、$\overline{\mathcal{E}}_G(X) = \overline{\mathcal{E}}(X_G)$ は $\pi^*: H^2(X_G,\mathbb{Z}^n) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}^n)$ の像と対応する。ここで p^* により $H^*(X)$ と $H^*(EG\times X)$ を同一視した。

なお、系の仮定は滑らかな多様体上の滑らかな作用の場合には実現されている。

EGの一点yを固定する。$j: X = y\times X \subset EG\times X$ とおく

と，j^* は系の π^* と同値である。j は fibering $X_G \longrightarrow BG$ の fiber の埋め込みである。そこで，その fibering の Serre の cohomology spectral sequence $E_r^{p,q}$ を考える。とくに，$E_2^{p,q} = H^p(BG, H^q(X, \mathbb{Z}^n))$ である。ここで与えられた G の X 上の作用により，$\pi_1(BG) = G/G_0$ が $H^*(X, \mathbb{Z}^n)$ に作用する。その意味での局所係数のコホモロジーを考えている。なお G_0 は単位元を含む G の連結成分である。

さて，$E_2^{0,2} = H^2(X, \mathbb{Z}^n)^G$ であり，その上で spectral sequence の differentials で自明でないものは，

$$d_2 : H^2(X, \mathbb{Z}^n)^G \longrightarrow E_2^{2,1} = H^2(BG, H^1(X, \mathbb{Z}^n))$$

$$d_3 : E_3^{0,3} \longrightarrow E_3^{3,0}$$

である。ここで $E_3^{0,3}$ は d_2 の kernel であり，$E_3^{3,0}$ は $E_2^{3,0} = H^3(BG, \mathbb{Z}^n)$ の商群になっている。以上を念頭におくと，spectral sequences の一般論により，先の系は次のようにいいかえられる。

系。<u>先の系と同じ仮定の下に，P が lifting をもつためには，$c_1(P) \in H^2(X, \mathbb{Z}^n)^G$，$d_2 c_1(P) = 0$ かつ $d_3 c_1(P) = 0$ となることが必要かつ十分である</u>。

例1. G がコンパクト，連結，単連結な半単純リー群の場合。そのとき BG は 3-連結な空間であり，$E_2^{2,1} = 0$，$E_3^{3,0}$

＝0となる。またGが連結だから，$H^2(X,\mathbb{Z}^n)^G = H^2(X,\mathbb{Z}^n)$.
したがって，この場合はどんなPも必ず *lifting* をもつ（*Stewart* [3]）.

例2. $G=T^\ell$, $H^1(X,\mathbb{Z}^n)=0$ の場合. $E_2^{2,1}=0$, $E_3^{3,0}=0$ となる。したがって，どんなPも必ず *lifting* をもつ（*Su* [4]）.

例3. G が有限群の場合. [2]で得られた定理である。

定理の証明は，この問題に対する障害理論を構成することにより行われる。本質的には[2]の方法を *continuous groups* の場合にまで拡張したものである。詳細は[1]に譲る。なお，障害理論を用いることにより *liftings* の分類を論ずることもできる。例えば最も単純な場合の例として次がある。

定理. Gはコンパクト連結リー群，Xは連結，局所有限なCW複体で $H^1(X,\mathbb{Z})=0$ となるもの，$P\to X$ は T^nバンドルで与えられたX上のG-作用 ϕ の *lifting* をもつものとする。そのとき，Aut(P)の元による *conjugations* を除いて ϕ の *liftings* の全体は $\mathrm{Hom}(\pi_1(G),\mathbb{Z}^n)$ と一対一に対応する。

文献

[1] A. Hattori, Lifting compact group actions in fiber bundles, in preparation.

[2] A. Hattori & T. Yoshida, Lifting finite group actions in fiber bundles, to appear

[3] T. E. Stewart, Lifting group actions in fiber bundles, Ann. of Math. 74 (1961), 192-198

[4] J. C. Su, Transformation groups on cohomology projective spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), 305-318.