数理解析研究所講究録
第 246 巻 1975 年 56-75

Equivariant Riemann-Roch theorem, localization and formal group law.

大阪大学 理学部　川久保 勝夫

§1 Introduction

Hirzebruch, Grothendieck, Atiyah-Singer 等の Riemann-Roch theorem は K-theory と普通の cohomology theory の Gysin homomorphism に関する relation であると言える。Dyer によりこれ等は一般的に扱われているが，ここではこれらの equivariant version 及び，localization との関係を考察するのを目標とする。

Atiyah-Singer 理論は結果と証明の idea と Hirzebruch の Riemann-Roch theorem にあると言っても過言でないと思うが，問題は technical な難点があり，それを克服した所にあると思う。

equivariant Riemann-Roch type theorem は，色々な category で 色々な形で可能であるが，例えば $h^*(\ )$ を一般 cohomology theory，G を compact Lie group，$G \to EG \longrightarrow BG$ を universal principal G-bundle，X を G-manifold とした時，

$$h_G^*(X) = h^*(EG \underset{G}{\times} X)$$

を考えてみよう。一般に $EG \underset{G}{\times} X$ は 多様体とならず Dyer の理論はあてはまらない。Dyer の言う S-dual の概念，$EG \underset{G}{\times} X$ の tangent bundle の概念はなく，又 $\lim^1$ の問題，どういう multiplicative transformation が考えられ かつ有効か？，その他種々の問題がある。Atiyah-Hirzebruch の differentiable Riemann-Roch theorem では K-theory の Bott periodicity を使って証明しているが，我々の場合は一般的にあつかうため，全然使えない。従って equivariant Gysin map を 定義することが，そもそも最初の問題である。

もう一つ，これ以前の大きな問題は，" formal に formulate した時 その式が どの程度意味のあるその

かどうか？"である。そのために どういう equivariant cohomology theory が面白いか見極めることが，中心問題となる。この結論を先に言うと，先にあげた equivariant cohomology theory

$$h^*(EG \underset{G}{\times} X)$$

が 非常に良く，Xと，X上の G-action の 様子を反映していることが分った。

このことを見極めれば 後は前に書いた technical な問題を処理すればよい。

equivariant Riemann-Roch theorem の応用は，普通の Riemann-Roch theorem の応用と類似の方向，例えば，equivariant integrality theorem, equivariant divisibility theorem 等々が構成されるが，他方 equivariant theory 特有の応用がある。それは localization theory と組合せた時に生じる。ここでは後者に限って話をすることにする。

§2 Equivariant Gysin homomorphism の定義．

G : compact Lie group

h_G : equivariant multiplicative cohomology theory

M, N ; G-manifolds

$f : M \to N$: G-map

その時 equivariant Gysin map

$$f_! : h_G(M) \longrightarrow h_G(N)$$

を我々は次の様に定義する。

$e : M \subset R^n$: G-embedding

$$M \xrightarrow{f \times e} N \times R^n : G\text{-embedding}$$

この normal bundle を ν とし，$T(\nu)$ でその Thom complex を表わすことにする。

$$h_G(M) \underset{\cong}{\xrightarrow{\text{Thom iso}}} \tilde{h}_G(T(\nu)) \xrightarrow{c^*} \tilde{h}_G(N \times D^n / N \times S^{n-1})$$

$$\underset{\cong}{\xrightarrow{\text{Thom iso}}} h_G(N)$$

この composition で $f_!$ を定義する。但し c は自然

につぶす写像を表わしている。

注意することは，考えている category で Thom isomorphism が存在するような equivariant cohomology theory である必要がある。

$f: M \longrightarrow pt$ の時 $f_!$ のことを index とよぶことにする。

$f_!$ は $h_G(pt)$-module homomorphism になることが分り，従って $h_G(pt)$ の任意の multiplicative set S で localize した写像

$$S^{-1}f_! \ : \ S^{-1}h_G(M) \longrightarrow S^{-1}h_G(N)$$

を考えることが出来る。

§3. Spin^c-category.

この節では Spin^c-category に限って考えることにする。Dyer の言う multiplicative transformation として Chern character みたいなもの考えたいのだが，equivariant にはどう定義したらよいか先ず問題である。我々は，試行錯誤の結果

$$ch_G : K_G(M) \longrightarrow H^*(EG \underset{G}{\times} M) \otimes Q$$

の形を予想し，実際 $x \in K_G(M)$ に対して
$x = [\xi_1] - [\xi_2]$ ，ξ_i : G-vector bundles
とした時，

$$ch_G(x) \overset{def}{=} ch(EG \underset{G}{\times} \xi_1) - ch(EG \underset{G}{\times} \xi_2)$$

と定義すると well-define で

$$\begin{cases} ch_G(x \otimes y) = ch_G(x) \cdot ch_G(y) \\ ch_G(x+y) = ch_G(x) + ch_G(y) \end{cases}$$

という望ましい性質がある。
同様な idea から

$$\hat{\mathfrak{a}}_G : K_G(M) \longrightarrow H^*(EG \underset{G}{\times} M) \otimes Q$$

を次で定義する。

$$\hat{\mathfrak{a}}_G(x) \overset{def}{=} \hat{\mathfrak{a}}(EG \underset{G}{\times} \xi_1)\, \hat{\mathfrak{a}}(EG \underset{G}{\times} \xi_2)^{-1}$$

ここで勿論 $\hat{\mathfrak{a}}$ は $x / 2\sinh(x/2)$ に対応する genus
を示している。

$$f: M \to N \quad : \quad G\text{-map}$$
$$e: M \to \mathbb{C}^n \quad : \quad G\text{-embedding}$$
$$f \times e : M \longrightarrow N \times \mathbb{C}^n \text{ の normal bundle}$$

ν が spin^c-structure をもち，G-action がその上に lift したとする。その時，

Theorem. $\forall \xi \in K_G(M)$ に対して，$\exists \eta \in K_G(N)$ s.t.

$$f_!\left(e^{\frac{c_G}{2}} \cdot ch_G(\xi) \cdot \hat{\mathfrak{A}}_G(TM)\right) = e^{\frac{c_G'}{2}} \cdot ch_G(\eta) \cdot \hat{\mathfrak{A}}_G(TN).$$

ここで ν の spin^c-reduction で G-action と compatible なやつに対応する元が

$$c_G \in H^2(EG \times_G M),$$

又

$$\mathbb{C}^n \to EG \times_G N \times \mathbb{C}^n \longrightarrow EG \times_G N$$

なる complex vector bundle の 1-st Chern class が

$$c_G' \in H^2(EG \times_G N),$$

である。さらに TM, TN は M, N の tangent bundle を表わす。

この定理の仮定は一見，望ましくないように見えるが，次の Proposition により解決される。

W_i : i-th Stiefel-Whitney class,

γ : Spin^c-structure に対応する $c \in H^2(M:Z)$ を first Chern class にもつ complex line bundle とした時，次が成立する。

Proposition

i) $f^*(W_3(N)) = W_3(M)$

$$\Downarrow$$

$W_2(M) - f^*(W_2(N)) = c \bmod 2$, $\exists c \in H^2(M:Z)$

$$\Updownarrow$$

$\mathcal{L}$ が spin^c-structure をもつ

ii) 上の spin^c-structure を P とした時

P に G-action が lift 可

$$\Downarrow$$

γ に G-action が lift 可

逆に

$$\left(\begin{array}{l} H^1(M : Z) = 0 \\ \quad\Downarrow \qquad G = T^n \text{の時, Stewart \& Su} \end{array}\right)$$

γ に G-action が lift

$$\Downarrow$$

G or G の double covering $\tilde{G}$ が P に lift 可.

上の定理の応用は §6 にする。

§4 Weakly almost complex G-actions.

この節では weakly almost complex manifolds 上の G-action を考える。equivariant cohomology theory としては次の組合せを考える。

$$K_G(X) \quad と \quad U^*(EG \underset{G}{\times} X)$$

$$K_G(X) \quad と \quad K^*(EG \underset{G}{\times} X)$$

$$K_G(X) \quad と \quad H^*(EG \underset{G}{\times} X).$$

自然な functor

$$\mu_1 : U^*(\ ) \longrightarrow K^*(\ )$$

$$\mu_2 : U^*(\ \ ) \longrightarrow H^*(\ \ )$$

があり，$U^*(\ )$ は universal (formal group に関して) なので $K_G(X)$ と $U^*(EG\underset{G}{\times}X)$ で formulate する。これ等を自然に μ_i で落せば他の所での formulae が得られる。

先ず multiplicative transformation として次を考える。

ξ : G - complex line bundle,

$$ch_{G y}(\xi) \overset{def}{=} \exp(1+y)g(e(EG\underset{G}{\times}\xi))$$

ここで $g(x)$ は Mischenko series

$$g(x) \overset{def}{=} \sum_{n\geq 0} \frac{[\mathbb{C}P^n]}{n+1} x^{n+1} \in U^*(pt)\otimes Q[[x]]$$

で，$e(\ \ )$ は Euler class を表わす。

splitting principle で

$$ch_{G y} : K_G(X) \longrightarrow U^*(EG\underset{G}{\times}X)\otimes Q[[y]]$$

が multiplicative transformation として定義される。

次 $U^*(EG\underset{G}{\times}X)$ theory value の Generalized Todd genus を試行錯誤で，次の様に定義する。

ξ : G-complex line bundle over X に対して

$$T_{Gy}(\xi) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{e(EG\underset{G}{\times}\xi)(\exp(1+y)g(e(EG\underset{G}{\times}\xi))+y)}{\exp(1+y)\,g(e(EG\underset{G}{\times}\xi))-1}$$

一般には splitting principle で multiplicative sequence

$$T_{Gy} : K_G(X) \longrightarrow U^*(EG\underset{G}{\times}X)\otimes Q[[y]]$$

が定義される。

以上の notation のもとに次の定理をうる。(G-action のない場合も，この type の定理 は知られてないと思う。)

Theorem M, N; weakly almost complex G-manifolds, $f: M \to N$; G-map, $\forall \xi \in K_G(M)$ に対して $\exists \eta \in K_G(N)[[y]]$ s.t.

$$f_!(ch_{Gy}(\xi) \cdot T_{Gy}(TM)) = T_{Gy}(TN) \cdot ch_{Gy}(\eta).$$

§5 localization

$h_G(pt)$ の multiplicative set S を，次の様に定義する。

$\psi: G \longrightarrow SO(m)$ representation without trivial direct summand

ψにより，$\mathbb{R}^m$を 1点上の G-vector bundle と思った時，その Euler class

$$\chi(\psi) \in h_G(pt)$$

を考える。こういう元全体で S を定義すると，multiplicative set となる。

Gysin map $f_!$ は $h_G(pt)$-module homomorphism だから

$$S^{-1}f_! : S^{-1}h_G(M) \longrightarrow S^{-1}h_G(N)$$

を induce する。

(M, φ, G) を G-action として F_μ を、不動点集合の component とし、

$$i_\mu : F_\mu \longrightarrow M$$

を inclusion、N_μ でその normal bundle を表わすことにする。

$$i_\mu^* i_{\mu!}(x) = \chi(N_\mu) \cdot x \qquad \forall x \in h_G(F_\mu)$$

であり、各 Euler class $\chi(N_\mu)$ が localized ring $S^{-1}h_G(F_\mu)$ で unit とすると、

Lemma $\left(\sum_\mu i_{\mu!}\right)^{-1}(x) = \sum_\mu \dfrac{i_\mu^*(x)}{\chi(N_\mu)}$

従って特に、

Theorem $\mathrm{Index}(x) = \mathrm{Index} \sum_\mu \dfrac{i_\mu^*(x)}{\chi(N_\mu)}$

for any $x \in h_G(M)$.

この定理は Atiyah-Segal, T. tom Dieck の定理の一般化である。

§6 応用

§5 の localization theorem と §3 の equivariant Riemann-Roch theorem と合せると，例えば次の定理が証明される。

Theorem (Atiyah-Hirzebruch)
M : connected spin-manifold with non trivial S^1-action
$\Rightarrow \quad \hat{\mathfrak{A}}(TM)[M]=0$.

Theorem fiber bundle
$M \to ET^n \underset{T^n}{\times} M \to BT^n$ に於て

$\hat{\mathfrak{A}}$-genus は Borel-Hirzebruch の意味で strictly multiplicative である。

次 weakly almost complex G-action を考えよう。

$U^*(EG \underset{G}{\times} X)$ theory に於て Thom isomorphism が存在するかどうか調べなければならない。単に equivariant Riemann-Roch theorem の為だけならば U^* にかわ

って inverse limit で定義すれば，cohomology theory かどうか分らないが一応 formulate は可能である。しかし localization theorem と両立のためにはどうしても $\lim^1$ が消えることが必要となる。幸いこれは吉村氏の次の議論により O.K. となる。（御教示に対して感謝の意を表したい。）

$$EG = \lim EG^n \quad , \quad EG^n : \text{finite CW complex.}$$

とした時，Atiyah-Segal により [1]，

$$\lim^1 K(EG^n \times_G M) = 0 \quad .$$

ところが，この状況では

$$\lim^1 U^*(EG^n \times_G M) = 0$$

$$\Updownarrow \ \text{Yoshimura [2]}$$

$$\lim^1 K(EG^n \times_G M) = 0 \ ,$$

従って，Thom isomorphism 等がある。

この結果 equivariant Riemann-Roch theorem と localization theorem 共に可能となる。

簡単のため weakly complex manifold 上の

S^1-action の場合を formulate してみると（それは G-signature theorem に対応して G-T_y-genus theorem とでも呼ぶべきものですが），

Theorem（G-T_y-genus formula）

$$T_y(M)$$

$$=\sum_{\mu}\prod_{\mu_i}\left(\frac{z_{\mu_i}\{\exp(1+y)g(z_{\mu_i})+y\}}{\exp(1+y)g(z_{\mu_i})-1}\right)\prod_{n\neq 0}\left(\frac{\exp(1+y)\{ng(t)+g(x_{\mu n i})\}+y}{\exp(1+y)\{ng(t)+g(x_{\mu n i})\}-1}\right)/[F_\mu]$$

ここに $T_y(M)$ は $G=\{1\}$ とした時の $T_{G,y}(TM)$

$c(F_\mu)=\prod(1+z_{\mu i})$

$N_\mu=\sum_{n\neq 0}\gamma^n\hat{\otimes}E_{\mu n}$

$\gamma^n: S^1\longrightarrow S^1$ なる表現で $\gamma^n(g)=g^n$

$c(E_{\mu n})=\prod(1+x_{\mu n i})$

t は　$U^*(BS^1)=U^*(pt)[[t]]$ なる生成元

$/[F_\mu]$ は U-theory slant product

を表わしている。

t は不定元として等式が成立しているので $\lim_{t\to\infty}$ を考え

ることにより Kosniowski, Hattori-Taniguchi の定理の一般化が得られる。(μ_2で疎したのが知られている公式である。)

Corollary

$$T_y(M) = \sum (-y)^{d^+(F_\mu)} T_y(F_\mu)$$

$$= \sum (-y)^{d^-(F_\mu)} T_y(F_\mu)$$

ここに

$$d^+(F_\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n>0} \dim(E_{\mu n})$$

$$d^-(F_\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n<0} \dim(E_{\mu n}) .$$

Corollary fiber bundle

$$M \longrightarrow ET^n \underset{T^n}{\times} M \longrightarrow BT^n$$

に関して T_y-genus は strictly multiplicative である。

勿論この Corollary より，例えば次の公式が得られる。

Corollary

$$T_y(S^{2m_1+1}\times\cdots\times S^{2m_n+1}\underset{T^n}{\times} M)[S^{2m_1+1}\times\cdots\times S^{2m_n+1}\underset{T^n}{\times} M]$$

$$= T_y(\mathbb{C}P^{m_1}\times\cdots\times\mathbb{C}P^{m_n})[\mathbb{C}P^{m_1}\times\cdots\times\mathbb{C}P^{m_n}]\cdot T_y(M)[M].$$

§7 最後に。

応用として $\hat{\mathfrak{A}}$-genus, T_y-genusについて書いたが，L-genusに関してAtiyah-SingerのG-signature theoremの別証は勿論のこと，他の一般のgenus，さらにgenusに限らず一般の元でO.K.である。従ってAtiyah-Singerの変換群への応用は，すべて拡張された形での別証が可能であるが，その他にequivariant Gysin homomorphismは，次の方向に有効である。

① 特別な表現使ってequivariant embedding theoremが構成される。

② equivariant characteristic numbersが定義され，G-bordismの特徴づけ可能である。

③ Mayer-SchwarzenbergerのTodd genusの

vanishing theorem が一般化される。

④ equivariant Landweber - Novikov operation とでも呼ぶべきものが定義され，これに関する Riemann - Roch type theorem が可能である。

⑤ 一般 cohomology theory での fiber bundle $M \to EG \times_G M \to BG$ に関して strictly multiplicative property をもつ genus の必要かつ十分条件.

⑥ equivariant Kodaira - Hodge - Hirzebruch theory の開発.

その他 equivariant Gysin homomorphism は色々な問題に有効であることが分って来た。これ等は又の機会に報告することにする。

参考文献

[1] M.F. Atiyah and G.B. Segal ; Equivariant K-theory and completion, J. Differential Geometry 3 (1969) 1-18.

[2] Z. Yosimura; On cohomology theories

of infinite CW-complexes, III, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 9 (1974), 683–706.