数理解析研究所講究録
第 248 巻 1975 年 67-82

Ultradistribution の或る特徴づけについて

京大 数理研　西和田 公正

序　正則函数の境界値を ultradistribution として把えようというのが本稿のテーマである。この種の研究としては小松 [3] がある。次の2つの問題について考える。

1. (singularity の order の問題)
   正則函数の境界への増大度と、その境界値が属する ultradistribution の class との関係。
2. (wave front の問題)
   境界値のとられる方向と ultradistribution の Fourier 像が急減少する方向との関係

1. については Martineau [4] の結果の一部が ultradistribution の場合にも成り立つことを調べる。2. に於ては Hörmander [2] によって導入された analytic wave front set を、正則函数の境界値の言葉によって言換える。

§1. Test functions と Ultradistributions

notations の煩雑さを避ける為に、ここでは Roumieu type の Gevrey class のみを考える．即ち

<u>定義1</u> (Test functions) $1 \leq s$ とする．$R^n \supset \Omega$: open, $\Omega \supset K$: regular compact, $h > 0$ に対して

$$\mathcal{E}_{s,h}(K) = \{ \varphi \in C^\infty(K) ; \exists C > 0, \sup_K |D^\alpha \varphi| \leqq C h^{|\alpha|} (\alpha!)^s \}$$

$$\mathcal{D}_{s,h}(K) = \mathcal{E}_{s,h}(K) \cap C_0^\infty(K)$$

とおく．両方とも Banach 空間である。更に

$$\mathcal{E}_s(K) = \varinjlim_{h \to \infty} \mathcal{E}_{s,h}(K)$$

$$\mathcal{E}_s(\Omega) = \varprojlim_{K \subset\subset \Omega} \mathcal{E}_s(K)$$

$$\mathcal{D}_s(K) = \varinjlim_{h \to \infty} \mathcal{D}_{s,h}(K)$$

$$\mathcal{D}_s(\Omega) = \varinjlim_{K \subset\subset \Omega} \mathcal{D}_s(K).$$

まとめると

$$\mathcal{E}_s(\Omega) = \{ \varphi \in C^\infty(\Omega) ; \forall K, \exists C, \exists h > 0, \sup_K |D^\alpha \varphi| \leqq C h^{|\alpha|} (\alpha!)^s \}$$

$$\mathcal{D}_s(\Omega) = \{ \varphi \in C_0^\infty(\Omega) ; \exists C, \exists h > 0, \sup |D^\alpha \varphi| \leqq C h^{|\alpha|} (\alpha!)^s \}$$

定義2 Ultradistribution of gevrey class of order s $(s>1)$ を $\mathcal{D}'_s(\Omega)$ で定義する. $\mathcal{E}'_s(\Omega)$ ($\subset \mathcal{D}'_s(\Omega)$) は compact support を持つ ultradistribution の全体である.

定義1.2 の諸空間の topology については 小松[3] に詳しい。

Ultradistribution と正則函数の境界値との関連を調べるのだから. Test functions も $\mathbb{C}^n$ 上の函数の制限と考えるのが自然であるように思われる.

定理1 $\mathbb{R}^n \supset \Omega$: open , V : Ω の complex nbd. このとき $\varphi \in C^1(\Omega)$ に対して次の (a) と (b) は同値である。

(a) $\varphi \in \mathcal{E}_s(\Omega)$

(b) 或る $\psi \in C^1(V)$ が存在して $\psi|_\Omega = \varphi$, 更に次の評価をみたす. : $\forall K \subset\subset \Omega$ に対して $\exists c, \exists h$

$$(1.1) \qquad \sup_K |\bar{\partial}\psi(x+iy)| \le c\exp(-|hy|^{\frac{1}{1-s}}) \qquad (s>1 \text{ の時})$$

$$(\quad \bar{\partial}\psi(x+iy)=0 \quad \text{near } K \qquad s=1 \text{ の時})$$

証明 (a) ⇒ (b) , $s>1$ の時. $\varphi \in \mathcal{D}_s(\Omega)$ と仮定

してよい．従がって

$$\exists h>0\ ,\ \sup|D^\alpha\varphi|\le C h^{|\alpha|}(\alpha!)^s$$

形式的に

$$\psi(x+iy)=\sum\varphi^{(\alpha)}(x)(iy)^\alpha\chi(b_{|\alpha|}y)/\alpha!$$

とおく。ここで $\chi\in C_0^\infty(R^n)$, $=1$ if $|y|\le\frac{1}{2}$, $=0$ if $|y|\ge1$ $\quad b_{|\alpha|}=h'|\alpha|^{(s-1)}$ もし $h<e^{s-1}h'$ ならば $\psi\in C^\infty(V)$ がわかる．この時

$$(1.2)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial\bar z_j}(x+iy)=\sum\varphi^{(\alpha+1_j)}(x)(iy)^\alpha\left(\chi(b_{|\alpha|}y)-\chi(b_{|\alpha|+1}y)\right)/2\alpha!$$
$$+\sum\varphi^{(\alpha)}(x)(iy)^\alpha b_{|\alpha|}\chi_j'(b_{|\alpha|}y)/2\alpha!$$

$$\frac{1}{2b_{|\alpha|+1}}\le|y|\le\frac{1}{b_{|\alpha|}}\quad\text{on}\ \operatorname{supp}\left(\chi(b_{|\alpha|}y)-\chi(b_{|\alpha|+1}y)\right)\quad\text{or}\ \operatorname{supp}\chi_j'(b_{|\alpha|}y)$$

に注意すれば (1.2) の summation は

$$(2h'|y|)^{\frac{1}{1-s}}-1\le|\alpha|\le(h'|y|)^{\frac{1}{1-s}}$$

の範囲でとればよいことがわかる．

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_j}\right|\le 2^{n-1}\sup_{(2h'|y|)^{\frac{1}{1-s}}-1\le|\alpha|\le(h'|y|)^{\frac{1}{1-s}}}\left\{C h^{|\alpha|+1}(|\alpha|+1)^s(\alpha!)^{s-1}|y|^{|\alpha|}\right\}$$

$$\leq C \exp(-|h'y|^{\frac{1}{1-s}}) \quad \text{if} \quad h < h'e^{s-1}$$

(b) ⇒ (a)　この場合も $s>1$ とし $\psi \in C_0^1(V)$ と仮定してかまわない。(a) を証明する為に φ を Cauchy kernel を使って表現した場合どうしても $\sup\left|\frac{\partial^j \psi}{\partial \bar{z}_{i_1}\cdots\partial \bar{z}_{i_j}}(x+iy)\right|$ といったものの実軸の近くでの減少度を仮定しなければならない。それを避ける為に dirac 函数の平面波展開

$$\delta(x) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\int_{|\omega|=1}\frac{d\omega}{(x\cdot\omega+i0)^n}$$

を利用する。$\varphi = \psi|_\Omega$ に対して

$$\varphi(x) = \int \varphi(x-x')\,\delta(x')\,dx'$$

$$= \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\iint \varphi(x-x')\,\frac{dx'\,d\omega}{(x'\cdot\omega+i0)^n}$$

$$= \frac{2i(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\iiint_{t>0}\frac{\langle\bar\partial\psi(x-x'+it\omega),\omega\rangle}{\langle x'+it\omega,\omega\rangle^n}\,dt\,dx'\,d\omega$$

$$= \frac{2i(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\iiint_{t>0}\frac{\langle\bar\partial\psi(x-x'+it\omega),t\omega\rangle}{\langle x'+it\omega,t\omega\rangle^n}\,t^{n-1}\,dt\,d\omega\,dx'$$

$$= \frac{2i(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\iint\frac{\langle\bar\partial\psi(x-x'+iy'),y'\rangle}{\langle x'+iy',y'\rangle^n}\,dy'\,dx'$$

$$= \frac{2i(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\iint\frac{\langle\bar\partial\psi(z'),\operatorname{Im} z'\rangle}{\langle x-z',\operatorname{Im} z'\rangle^n}\,dx'\,dy'$$

$$\therefore \ |D^\alpha \varphi| \le C\alpha! \sup \left(|\mathrm{Im}\, z|^{-n-|\alpha|} |\bar\partial \psi(z)| \right)$$
$$\le C\alpha! \sup \left(|y|^{-n-|\alpha|} \exp\left(-|hy|^{\frac{1}{1-s}}\right) \right)$$
$$\le C h'^{|\alpha|} (\alpha!)^s \quad , \ \exists h' .$$

以後 Ω, V は定理1の意味でとる. R^n の open convex cone Γ に対して $T(\Gamma) = R^n + i\Gamma$ とおく.

<u>定理2</u> 正則函数 $f \in \mathcal{O}(V \cap T(\Gamma))$ に対して次の4条件は同値である.

任意の $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ に対して

(a) $\lim\limits_{\substack{y \downarrow 0 \\ y \in \Gamma'}} f(x+iy)$ が $\mathcal{D}'_s$ の中で存在する.

(b) $\Gamma' \ni y$ が小さい時, x の函数族 $\{f(x+iy)\}$ は $\mathcal{D}'_s$ の中で有界.

(c) $\forall K \subset\subset \Omega$, $\forall h > 0$ をとると $\exists \delta > 0$, $\underbrace{\exists C > 0}^{\exists M}$

$$(1.3) \quad \left| \iint f(x+iy) \phi(x, y)\, dx\, dy \right| \le C \sup_{\substack{\alpha, (x, y) \\ |\beta| \le M}} \left| \frac{D_x^\alpha D_y^\beta \phi(x, y)}{h^{|\alpha|} (\alpha!)^s} \right|$$

$$\text{for } \forall \phi \in \mathcal{D}_{s,h}\left((K + i\Gamma') \cap \{|y| \le \delta\} \right)$$

(d) $\forall K \subset\subset \Omega$, $\forall h > 0$ をとると $\exists C > 0$

$$(1.4) \quad \sup_{x \in K} |f(x+iy)| \le C \exp\left(|hy|^{\frac{1}{1-s}} \right), \quad y \in \Gamma' : \text{small}$$

注意1　(d)⇒(a) は小松[3]によって証明された。ここでの我々の証明は[3]のものと若干異なる。hyperdifferential operator を用いない代わりに定理1を用いる。

注意2　(c)は f が境界 Ω を越えて R^{2n} の ultradistribution として（y方向には distribution）定義される可能性を示唆している。この種の関係は Martineau によって発見されたが、ここではそういう表現を表に出すことはしなかった。Martineau は更に f の distribution としての prolongement $\tilde{f}$ で $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{2} bf \otimes \delta(y)$（$bf$ は f の境界値，$n=1$ の時の式）なるものが存在することを示した。我々の証明（(d)⇒(a)）はこの考えに負う所が大きい。

定義3　$f \in \mathcal{O}(V \cap T(\Gamma))$ が定理2の同値条件をみたす時 f は $\mathcal{D}'_s(\Omega)$ の中に境界値 $f(x+i\Gamma 0) = \lim_{y \downarrow 0} f(x+iy)$ を持つと云う。

定理2の証明　(d)⇒(a)　$\forall \varphi \in \mathcal{D}_s(\Omega)$ に対して $\lim_{y\downarrow 0} \langle f(x+iy), \varphi(x) \rangle$ が存在することを示せばよい。定理1による φ の $\mathbb{C}^n$ への拡張を $\psi(x+iy)$ とする。（$\operatorname{supp}\psi \subset V$ としてよい。）任意の $u \in C_0^1(\mathbb{C})$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(z)\,dz = 2i \iint_{y>0} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(x+iy)\,dx\,dy, \quad (z = x+iy)$$

であることに注意すれば、$\theta \in \Gamma'$ を勝手に固定した時、

$$\lim_{y \downarrow 0} \langle f(x+iy), \varphi(x) \rangle$$
$$= \lim_{y \downarrow 0} 2i \iint_{t>0} f(x+iy+it\theta) \langle \bar{\partial} \psi(x+it\theta), \theta \rangle dx dt.$$

右辺は $y \in \Gamma'$ がどのような path で 0 に収束しようとも (1.1) と (1.4) によって絶対収束する積分

$$(1.5) \qquad 2i \iint_{t>0} f(x+it\theta) \langle \bar{\partial} \psi(x+it\theta), \theta \rangle dx dt$$

に収束する。

(a) ⇒ (b) は明らかである。

(b) ⇒ (c) $\{ f(x+iy) \}_{\Gamma' \ni y : \text{small}}$ は $\mathcal{D}_s'(\Omega')$ $(\Omega' \subset\subset \Omega)$ の中で有界であるから、~~同程~~ $\mathcal{D}_s(\Omega')$ の上で同程度連続である。($\mathcal{D}_s$ は tonnelé であることに注意) 従がって $\mathcal{D}_{s,h}(K)$ $({}^\forall K \subset\subset \Omega, {}^\forall h > 0)$ 上でも同程度連続である。

$$\therefore \quad |\langle f(x+iy), \psi(x) \rangle| \leq C \sup_{x, \alpha} \frac{|D_x^\alpha \psi|}{h^{|\alpha|} (\alpha!)^s}, \quad {}^\forall \psi \in \mathcal{D}_{s,h}(K)$$

C は small $y \in \Gamma'$ に independent である。

$$\therefore \quad \left| \iint f(x+iy) \, \phi(x,y) \, dx dy \right|$$

$$\leq C\int_{|y|\leq \delta} \sup_{x,\alpha} \frac{|D_x^\alpha \phi(x,y)|}{h^{|\alpha|}(\alpha!)^s}\, dy$$

$$\leq C' \sup_{x,y,\alpha} \frac{|D_x^\alpha \phi(x,y)|}{h^{|\alpha|}(\alpha!)^s}$$

(c) ⇒ (a)　K', Γ'' を　$K+i\Gamma' \subset\subset K'+i\Gamma'' \subset\subset \Omega+i\Gamma$ となるようにとる。或る $\varepsilon>0$ が存在し $z=x+iy \in K+i\Gamma'$ に対して $\mathrm{dist}\,(x, \partial K')>\varepsilon$, $\mathrm{dist}\,(y, \partial\Gamma'')>\varepsilon|y|$ とできる. $\psi(\tau)\in \mathcal{D}_s(\mathbb{C})$ を $\psi=1$ if $|\tau|\leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\psi=0$ if $|\tau|\geq\varepsilon$ となるようにとる。$\phi(\zeta)=\prod_1^n \psi(\zeta_j)$ は $\mathcal{D}_{s,h}(\mathbb{C}^n)$ の元である。$h>0$ は任意に大きくとれる。Cauchy の積分定理によって $z=x+iy\in K+i\Gamma'$ に対して

$$f(z)=(-\pi)^n\iint \frac{f(\zeta)}{\prod(\zeta_j-z_j)}\frac{\partial^n}{\partial\bar\zeta_1\cdots\partial\bar\zeta_n}\left[\phi\left(\xi-x+i\frac{\eta-y}{|y|}\right)\right]d\xi d\eta$$

$$\therefore\ |f(z)|\leq C\sup_{\substack{\alpha,(\xi,\eta)\\|\beta|\leq M\\|\zeta_j-z_j|\geq\frac{\varepsilon}{2}|y|}}\left(\frac{D_\eta^\beta D_\xi^\alpha\left[\dfrac{\frac{\partial^n}{\partial\bar\zeta_1\cdots\partial\bar\zeta_n}\left(\phi\left(\xi-x+i\frac{\eta-y}{|y|}\right)\right)}{\prod(\zeta_j-z_j)}\right]}{h^{|\alpha|}|\alpha|^{s|\alpha|}}\right)$$

$$\leq C|y|^{-2n-M}\sup_\alpha\left(1\Big/\left|\frac{\varepsilon y}{2}\right|^\alpha h^{|\alpha|}|\alpha|^{(s-1)|\alpha|}\right)$$

$$\leq C|y|^{-2n-M}\exp\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}h|y|\right)^{\frac{1}{1-s}}\right)$$

$$\leq C_{h'}\exp\left(|h'y|^{\frac{1}{1-s}}\right)\quad\left(h'\text{ は任意に大きくとれる.}\right)$$

§2 Analytic wave front set

Roumieu [7] により $\mathcal{E}'_s$ の元に対して Fourier 変換, Parseval's, Fourier inversion formulae, convolution の Fourier 像 etc. が $\mathcal{E}'$ の時と同じように成立つことが確認された。従がって [2] の方法によって $f \in \mathcal{D}'_s$ に対して $WF_A(f)$ が定義される。

<u>定義4</u> $f \in \mathcal{D}'_s(\Omega)$, $(x_0, \xi_0) \in T^*(\Omega) \setminus 0$,

$(x_0, \xi_0) \notin WF_A(f) \iff \exists U$: x_0 の nbd,

$\exists V$: ξ_0 の conical nbd,

$\exists \{f_N\}$: bdd seq. in $\mathcal{E}'_s(\Omega)$

s.t. $f_N = f$ in U,

$$(2.1) \qquad |\hat{f}_N(\xi)| \le C(CN/|\xi|)^N, \quad \xi \in V, \quad N = 1, 2, \cdots$$

<u>補題1</u> $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, $r > 0$, N: 自然数, $h > 0$

$\Rightarrow \exists \chi_N \in \mathcal{D}_s(\mathbb{R}^n)$ s.t. $\chi_N = 1$ in K,

$\chi_N = 0$ in $\{x ; \operatorname{dist}(x, K) \ge r\}$,

$$(2.2) \qquad |D^{\alpha+\beta}\chi_N| \le C(C/r)^{|\alpha|}|\alpha|^{s|\alpha|}(CN/r)^{|\beta|}, \quad |\beta| \le N$$

C は s と n によって決まる.

<u>補題2</u> f, (x_0, ξ_0), U, V に対して (2.1) が正

しいとする。 $U \supset\supset K$: compact nbd of x_0 , $V \supset\supset \Gamma$: conical nbd of ξ_0 を任意にとる。 $\chi_N \in C_0^\infty(U)$, $=1$ on K は (2.2) をみたすとする。この時 $\{\chi_N f\}$ は $\mathcal{E}'_s$ の中で有界で Γ の上で (2.1) をみたす。

補題1.2 の証明は [2] と全く同様に証明できる。$\{\chi_N\} \subset \mathcal{D}_s$ が (2.2) をみたせば $\{\chi_N\}$ は $\mathcal{D}_{s'}$ $(\forall s' \geq s)$, $\mathcal{D}$ の中でも有界である。ゆえに $\{\chi_N f\}$ は $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}'_{s'}$ $(s' \geq s)$ の中で有界であるから次の系を得る。

<u>系1</u> $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_s$, $\mathcal{D}_{s'}$ $(1 < s' \leq s)$ に於ける analytic wave front set の概念は compatible である。

<u>定理A3</u> $\pi : T^*(\Omega) \setminus 0 \to \Omega$ とすると $\pi(WF_A(f)) = \text{anal. sing. supp } f$ である。（証明は (2) と同じ）

<u>定理A4</u> $f \in \mathcal{D}'_s(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ とする。

$\{V_\alpha\}$: finite family of open convex proper cones in $\mathbb{R}^n$

$\{\Gamma_\alpha\}$: V_α の dual cones

この時 次の (a) と (b) は同値である。

(a) $WF_A(f)|_{x_0} \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$

(b) $\exists \omega$: x_0 の nbd , W : ω の complex nbd

$\exists \Gamma'_\alpha \supset\supset \Gamma_\alpha$, $f_\alpha \in \mathcal{O}(W \cap T(\Gamma'_\alpha))$

s.t. $$f = \sum_\alpha f_\alpha(x + i\Gamma_\alpha 0) \quad \text{in } \mathcal{D}'_s(\omega)$$

<u>証明</u>　(b) ⇒ (a)　次の補題は便利である.

<u>補題 3</u>　$\chi_{2N} \in \mathcal{D}_s(\Omega)$,　V : Ω の complex nbd

χ_{2N} の $\mathbb{C}^n$ への拡張　$\chi_{2N}(x+iy) \in C_0^\infty(V)$ で次の評可をみたすものが存在する。

$$(2.3)\qquad \sup_x \left| D_x^\beta \bar{\partial}\, \chi_{2N}(x+iy) \right| \le C(C|y|)^N N^{|\beta|} \exp\left(-|hy|^{\frac{1}{1-s}}\right)$$
$$\text{when} \quad |\beta| \le N$$

C, h は N に independent である.

<u>証明</u>　定理 1 の証明と同様に

$$\chi_{2N}(x+iy) = \sum \chi_{2N}^{(\alpha)}(x)(iy)^\alpha \chi(b_{|\alpha|}y)/\alpha!$$

とおく。χ は定理 1 の時と同じものであるが. $\{b_{|\alpha|}\}$ は

$$b_0 = b_1 = \cdots = b_N \le b_{N+1} \le \cdots$$
$$b_{N+j} = h' j^{s-1}$$

とおく。ここで　$b_0 = h'$ は　$\chi_{2N} \in C_0^\infty(V)$ となるようにとる。次のような評可を考える.

$$|y|^{-N} \exp\left(h|y|^{\frac{1}{1-s}}\right) \left| D_x^\beta \sum_{|\alpha| \le N} \chi_{2N}^{(\alpha+1_j)}(x)(iy)^\alpha \left(\chi(b_{|\alpha|+1}y) - \chi(b_{|\alpha|}y)\right)\right| / \alpha!$$

$$\le \sum_\alpha \frac{C(CN)^{|\alpha|+|\beta|}}{\alpha!} \cdot \left(\frac{1}{2d_0}\right)^{N-|\alpha|} \cdot \exp\left(h(2d_0)^{\frac{1}{s-1}}\right)$$

$$\leq C^{1+N} N^{|\beta|}$$

$$|y|^{-N} \exp(\bullet(h|y|)^{\frac{1}{1-s}}) \Big|\sum_{|\alpha|>N} \chi_{2N}^{(\alpha+\beta+1_j)}(x)(iy)^{\alpha}\big(\chi(b_{|\alpha|+1}y)-\chi(b_{|\alpha|}y)\big)\Big| \div 2\alpha!$$

$$\leq \exp((h|y|)^{\frac{1}{1-s}})\,(CN)^{|\beta|+N}\sum_{|\alpha|>N} C h^{|\alpha|-N}(|\alpha|-N)^{s(|\alpha|-N)}|y|^{|\alpha|-N}$$

$$|(\chi(b_{|\alpha|+1}y)-\chi(b_{|\alpha|}y))|\cdot|\alpha|^{-|\alpha|}$$

$|\alpha|^{|\alpha|} \geq (|\alpha|-N)^{|\alpha|-N} N^N$ に注意すれば 上の式は やはり $C^{1+N} N^{|\beta|}$ で押さえ~~ら~~られる.

<u>定理4の証明</u> ((b) ⇒ (a))　　$\theta \in \Gamma$, $|\alpha| \leq N$ の時

$$\xi^{\alpha} \langle f(x+i\Gamma_0), \chi_{2N}(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle$$

$$= 2i \iint_{t>0} D_x^{\alpha}\{f(x+it\theta)\langle\bar\partial\chi_{2N}(x+it\theta),\theta\rangle\} e^{-i\langle x+it\theta,\xi\rangle} dx.$$

$\langle\xi\cdot\theta\rangle < 0$ なる ξ の conical nbd で 上の式は (2.3) より $C(CN)^N$ で押さえられる.

(a) ⇒ (b)　　$V_\alpha' \subset\subset V_\alpha$ を

$$WF_A(f)|_{x_0} \subset \bigcup_\alpha V_\alpha' \overset{\text{def}}{=} F^{c}$$

となるようにとる.

$$(2.4)\qquad g(x) \overset{\text{def}}{=} (2\pi)^{-n}\int_F \hat{f}_N(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi$$

$$(2.5)\qquad = f_N(x) - (2\pi)^{-n}\int_{\bigcup_\alpha V'_\alpha} \hat{f}_N(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi .$$

(2.5) の第2項は Γ'_α (V'_α の dual cone) 方向からの正則函数の境界値の和に書ける。 $f = f_N$ (near x_0) に注意すれば

$$WF_A(g)_{|x_0} \subset \bigcup_\alpha \overline{V'_\alpha} \subset \bigcup_\alpha V_\alpha .$$

ゆえにもし g の分解が得られれば f の分解が得られることになる。一方 (2.4) より $g \in C^\infty$ である。従がって (a)⇒(b) C^∞ 函数 f について証明すればよい。しかしこの場合(更に $\mathcal{D}'$ の場合) 定理5は [5] によって証明された。

定理2の notation によって $f \in \mathcal{O}(V \cap T(\Gamma))$ をとる。定理4の (b)⇒(a) により $WF_A(f) \subset \Omega \times$ (Γの dual cone) これに (a)⇒(b) を適用すると 各 $x \in \Omega$ に対して $\tilde{f} \in \mathcal{O}$ ((xの複素近傍) $\cap T(\tilde{\Gamma})$) ($\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$) が得られる。この時 $f \equiv \tilde{f}$ である。

<u>定理5</u>　$f \in \mathcal{O}(V \cap T(\Gamma))$, $f(x + i\Gamma 0) = 0$ in $\mathcal{D}'_S(\Omega)$ ならば $f \equiv 0$ である。

<u>証明</u> 適当な complex hyperplane で切ればよいから

fは1変数と仮定してよい. $K \subset\subset \Omega$, $\mathrm{dist}(K, \partial V) > \varepsilon$ とする. $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}_{s,R}(K)$ を fix する.

$$g(\zeta) = \int f(x+\zeta)\varphi(x)\,dx \qquad (\operatorname{Im}\zeta > 0)$$

$$= 2i \iint_{t>0} f(x+it+\zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}(x+it)\,dt\,dx$$

($\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}$ は定理1によって構成した $\varphi(x+iy)$ に対するもの)

$D_\varepsilon = \{\zeta;\ \operatorname{Im}\zeta > 0,\ |\zeta| < \varepsilon\}$ とおくと. $g(\zeta)$は D_ε で正則, $\overline{D}_\varepsilon$ で連続, $\partial D_\varepsilon \cap \{\operatorname{Im}\zeta = 0\}$ で 0 である. 故に $g \equiv 0$. これより $\forall y$に対して $f(x+iy) = 0$. 即ち $f \equiv 0$ である.

References

[1] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables. van Nostrand, 1966.

[2] Hörmander, L., Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math. vol 24, pp 671 ~ 704, 1971.

[3] Komatsu, H., Ultradistributions, I Structure theorems and a characterizations, J. Fac. Sci.

Univ. Tokyo, Sec IA, 20, pp 25 - 105, 1973.

[4] Martineau, A., Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes, Proc. Inter. Summer Course on the theory of distributions, Lisbon, pp 195 - 326, 1964.

[5] Nishiwada, K. On local characterizations of wave front sets of distributions in terms of boundary values of analytic functions and their application to partial differential equations, To appear

[6] Roumieu, C., Ultra-distributions définis sur R^n et sur certaines classes de variétés différentiables, J. Anal. Math. 10 (1962-63), pp 153 - 192.