数理解析研究所講究録
第 248 巻 1975 年 205-211

概均質ベクトル空間の相対不変式のFourier変換について

名大・理　　鈴木利明

概均質ベクトル空間の相対不変式をFourier変換すれば、Γ函数と指数函数が係数につくだけで、元にもどる（　　　）が、その係数を具体的に求めることは一般に困難であった。1974年春から夏にかけて、柏原正樹氏は極大過剰決定系の主要表象の理論を使って、この問題を線型代数の問題に帰着させた。

（G, V）を正則概均質ベクトル空間の実形の1つとする。ある条件の下で、次のような超函数を考えよう。

$$u_\nu(s)=\begin{cases} |f(x)|^s & \text{if } x\in V^{(\nu)} \\ 0 & \text{if } x\notin V^{(\nu)} \end{cases}$$

ここで、$f(x)$は、（G, V）の相対不変式、$V^{(\nu)}$は$V-\{f(x)=0\}$の連結成分である。　$\nu=1,2,\cdots,N$

$$u^*_\nu(s)=\int_{V^{*(\nu)}} |f^*(y)|^{-s} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x\,Y\rangle} dY$$

ここで $(G\ V^*)$ は. $\langle \rho(g)X, \rho^*(g)Y \rangle = \langle X.Y \rangle$ ($g\in G$. $X\in V$ $Y\in V^*$) なる作用をもつ概均質ベクトル空間で. $f^*(Y)$ は、その相対不変式. $V^{*(\nu)}$ は $V^* - \{f^*(Y)=0\}$ の 連結成分である。
柏原氏の結果は次の通りである。

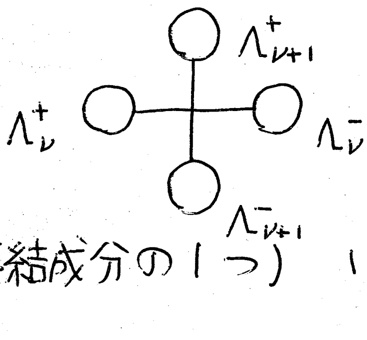
$$\begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_N(s) \end{bmatrix} = (2\pi)^{-rs-\frac{n}{2}} |c_0|^s |c_1|^{\frac{1}{2}} \cdot {}^tA(s) \begin{bmatrix} u_1^*(s+\frac{n}{r}) \\ \vdots \\ u_\nu^*(s+\frac{n}{r}) \end{bmatrix}$$

ここで. $r = \deg f$, $n = \dim V$, $c_0 = f(x)\cdot f^*(\mathrm{grad}\log f(x))$
$c_1 = f^{*\frac{2n}{r}}(y)\cdot \mathrm{Hess}\log f^*(y)$ である。

次に行列 $A(s)$ について説明する。$\mathfrak{M}$ を極大過剰決定系

$$\mathfrak{M}\ ;\ \{\langle A\cdot x\ \ D_x \rangle - s\cdot \delta\chi(A)\} u = 0$$
$$A\in \mathfrak{g}\ ;\ G\text{のリー環},\quad x\in V$$

とし、W_0 を $\mathfrak{M}$ の特性多様体 (Lagrangien 多様体)($\sqrt{-1}T^*V$ すなわち $V\times V^*$ で考える) とし、Λ_ν をその既約成分とする。
いま $\Lambda_0, \Lambda_1, \cdots, \Lambda_n$ という既約成分があり. Λ_0 が零断面 $V\times\{0\}$, Λ_n が原点の余法束 $\{0\}\times V^*$ で. Λ_ν と $\Lambda_{\nu+1}$ は余次元 1 で連がっているとする。各 Λ_ν を連結成分に分解して見れば.



となっている。(Λ_ν^+ 等は Λ_ν の連結成分の1つ) いま交わりの生成点を (x_0, y_0) とした

とき，Λ_νがy_0を含む軌道の余法束，$\Lambda_{\nu+1}$がx_1を含む軌道の余法束となっているとき，Λ_νの各連結成分に同伴した数($C_\nu^\pm$等)の間の関係が次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} C_{\nu+1}^{+} \\ C_{\nu+1}^{-} \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}\beta} & e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}\beta} \\ e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}\beta} & e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{4}\{\tau(\Lambda_\nu^+)-\tau(\Lambda_\nu^+\cap\Lambda_{\nu+1})\}} & \\ & e^{\frac{\pi}{4}\{\tau(\Lambda_\nu^-)-\tau(\Lambda_\nu^+\cap\Lambda_\nu^-)\}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_\nu^{+} \\ C_\nu^{-} \end{pmatrix}$$

但し，$\beta = \mathrm{ord}_{\Lambda_0} f^s - \mathrm{ord}_{\Lambda_1} f^s + \frac{1}{2}$

$$\tau(\Lambda_\nu^\pm) = \sqrt{-1}\ \underset{A\in\mathfrak{g}}{\mathrm{sgn}} \langle A x_0^\pm, -{}^tA y_0^\pm \rangle$$

$$\tau(\Lambda_\nu^+ \cap \Lambda_\nu^-) = \sqrt{-1}\ \underset{A\in\mathfrak{g}}{\mathrm{sgn}} \langle A x_1, -{}^tA y_0 \rangle$$

ここで，$(x_0^\pm, y_0^\pm)$は，$\Lambda_0^\pm$の生成点である。

このとき行列$A(s)$は，

$$\begin{pmatrix} C_n^{(1)} \\ \vdots \\ C_n^{(N)} \end{pmatrix} = A(s) \begin{pmatrix} C_0^{(1)} \\ \vdots \\ C_0^{(N)} \end{pmatrix}$$

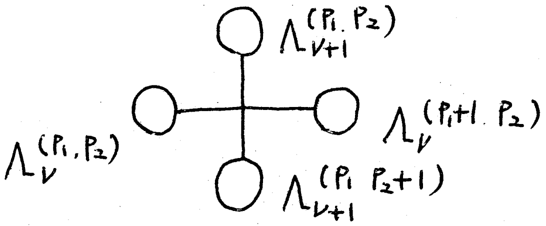
で与えられる。

例1．Vを複素エルミット行列全体のなす空間とし，Gを$GL(n,\mathbb{C})$ ~~×GL~~ とし，その作用を$X \mapsto gX{}^t\bar{g}$ $(g\in G,\ X\in V)$とすれば，相対不変式が$\det X$なる3概均質ベクトル空間となる。この場合のΛ_νは$\{(X, Y);\ \mathrm{rank}\,X \leq n-\nu,\ \mathrm{rank}\,Y \leq \nu,\ XY=0\}$

で、それは次のような連結成分に分かれる。

$$\Lambda_\nu^{(p_1,p_2)} = \{(X,Y)\in\Lambda_\nu \,;\, \operatorname{sgn} X = (p_1, n-\nu-p_1),\ \operatorname{sgn} Y = (p_2, \nu-p_2)\}$$

交わり方は



となっている。

同伴数の間の関係は、($\frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{2\pi}}$を省略して)

$$\begin{bmatrix} C_{\nu+1}^{(p_1,p_2)} \\ C_{\nu+1}^{(p_1,p_2+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{\nu-p_2} e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(s+1)} & (-1)^{\nu-p_2} e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(s+1)} \\ (-1)^{p_2} e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(s+1)} & (-1)^{p_2} e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(s+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\nu^{(p_1,p_2)} \\ C_\nu^{(p_1+1,p_2)} \end{bmatrix}$$

となる。ここで、$C_0^{(p_1,0)} = t^{p_1}$ とおけば

$$C_n^{(0,j)} = (-1)^{\sum_1^{j-1}k+\sum_1^{n-j-1}k}\left(e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(s+1)}+e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(s+1)}t\right)^j\left(e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(s+1)}+e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(s+1)}\right)^{n-j}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{\frac{j^2+(n-j)^2-n}{2}}\sum_{k=\mathrm{Max}(0,i+j-n)}^{\mathrm{Min}(i,j)}\binom{j}{k}\binom{n-j}{i-k}e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(s+1)(2j+2i-4k-n)}t^i$$

だから、${}^tA(s) = (a_{ij}(s))$ とすれば

$$a_{ij}(s) = (-1)^{\frac{j^2+(n-j)^2-n}{2}}\sum_{k=\mathrm{Max}(0,i+j-n)}^{\mathrm{Min}(i,j)}\binom{j}{k}\binom{n-j}{i-k}e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(s+1)(2j+2i-4k-n)}$$

となり、結局、

$$|\det X|_i^s = (2\pi)^{-ns}\pi^{-\frac{n(n+1)}{2}}2^{-n}\Gamma(s+1)\Gamma(s+2)\cdots\Gamma(s+n)$$

$$\sum_{j=0}^{n}a_{ij}(s)\int_{V_j}|\det Y|^{-s-n}e^{2\pi\sqrt{-1}\operatorname{Tr}XY}dY.$$

となる。ここで. $V_i = \{ X \in V \,;\, \mathrm{sgn}\, X = (i, n-i) \}$

$$|\det X|_i^s = \begin{cases} |\det X|^s & \text{if } X \in V_i \\ 0 & \text{if } X \notin V_i \end{cases}$$

$$dY = \prod_{i=1}^{n} dy_{ii} \prod_{1 \le i < j \le n} d\,\mathrm{Re}\, y_{ij}\, d\,\mathrm{Im}\, y_{ij}, \qquad Y = (y_{ij})$$

例2　$V = \{ X \,;\, m$行n列実数行列$\}$

$$V_i = \{ X \,;\, \mathrm{sgn}\, {}^tXHX = (i, n-i) \} \qquad 0 \le i \le n$$

$$|\det {}^tXHX|_i^s = \begin{cases} |\det {}^tXHX|^s & \text{if } X \in V_i \\ 0 & \text{if } X \notin V_i \end{cases}$$

$$dX = \prod_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} dx_{ij}, \quad X = (x_{ij}), \quad H = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix} \quad p, q > n.$$

このとき,

$$\int_{V_i} |\det {}^tXHX|^{s-\frac{m}{2}} e^{2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{Tr}\, {}^tXHY} dX$$
$$= \pi^{-2ns+\frac{mn}{2}-n} \Gamma(s)\Gamma(s-\tfrac{1}{2}) \cdots \Gamma(s-\tfrac{n-1}{2})$$
$$\Gamma(s+\tfrac{n+1-m}{2})\Gamma(s+\tfrac{n-m}{2}) \cdots \Gamma(s-\tfrac{m-2}{2}) \sum_{j=0}^{n} C_{ij}(s) |\det {}^tYHY|_j^{-s}$$

となる。ただし

$$C_{ii}(s) = \begin{cases} P_i \cdots P_1 Q_{n-i} \cdots Q_1 & \text{if } i, n-i \text{ even} \\ (-1)^{\frac{i}{2}} P_i \cdots P_1 Q_{n-i} \cdots Q_1 & \text{if } i\text{: even},\ n-i\text{: odd} \\ (-1)^{\frac{n-i}{2}} P_i \cdots P_1 Q_{n-i} \cdots Q_1 & \text{if } i\text{: odd},\ n-i\text{: even} \\ (-1)^{\frac{n+2}{2}} P_i \cdots P_2 Q_{n-i} \cdots Q_2 (P_1 Q_0 + \tilde{P}_1 \tilde{Q}_0) & \text{if } i, n-i\text{: odd}. \end{cases}$$

$$C_{i\,i+1}(s) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-i-1}{2}} P_{i+1} \cdots P_2 \widetilde{Q}_3 Q_{n-i-1} \cdots Q_1 & \text{if } i\text{: even } n-i\text{: odd} \\ P_{i+1} \cdots P_2 \widetilde{Q}_{-n} Q_{n-i-1} \cdots Q_1 & \text{if } i,\ n-i\text{: even} \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$$

$$C_{i\,i-1}(s) = \begin{cases} (-1)^{\frac{i-1}{2}} P_{i-1} \cdots P_1 Q_{n-i+1} \cdots Q_2 \widetilde{P}_3 & \text{if } i\text{: even } n-i\text{: odd} \\ (-1)^{\frac{i}{2}} P_{i-1} \cdots P_1 Q_{n-i} \cdots Q_1 \widetilde{P}_0 & \text{if } i,\ n-i\text{: even} \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$$

その他　　0

$$P_\ell = \cos\frac{\pi}{2}(2s-p+\ell) \qquad \widetilde{P}_\ell = \cos\frac{\pi}{2}(p+\ell)$$

$$Q_\ell = \cos\frac{\pi}{2}(2s-q+\ell) \qquad \widetilde{Q}_\ell = \cos\frac{\pi}{2}(q+\ell)$$

例3　$V = \{ X = (x_{ijk})\ ;\ 1 \leq i, j, k \leq 6 \quad (x_{ijk})$；反対称テンソル$\}$

；$\mathbb{R}$上の6元3次反対称空間（$GL(6)$が自然に作用している。）

$$f(X) = x_0 \det((x'_{ij})) + x'_0 \det((x_{ij})) + \sum_{1 \leq i,j \leq 3} \det X_{ij} \cdot \det X'_{ij} - \frac{1}{4}\Big(x_0 x'_0 - \sum_{1 \leq i,j \leq 3} x_{ij} x'_{ij}\Big)^2$$

ここで　$x_{123} = -x_0, \quad x_{456} = -x'_0$

$$(x_{ij}) = \begin{pmatrix} x_{423} & x_{143} & x_{124} \\ x_{523} & x_{153} & x_{125} \\ x_{623} & x_{163} & x_{126} \end{pmatrix} \quad (x'_{ij}) = \begin{pmatrix} x_{156} & x_{416} & x_{451} \\ x_{256} & x_{426} & x_{452} \\ x_{356} & x_{436} & x_{453} \end{pmatrix}$$

X_{ij}, X'_{ij} ；$(x_{ij}), (x'_{ij})$からi行j列を除いた行列

$$V_{\pm} = \{ X \,;\, f(X) \gtrless 0 \}$$

$$|f(X)|_{\pm}^{s} = \begin{cases} |f(X)|^{s} & \text{if } X \in V_{\pm} \\ 0 & \text{if } X \notin V_{\pm} \end{cases}$$

$$dX = \prod_{1 \le i < j < k \le 6} dx_{ijk}$$

$$\int_{V_+} |f(X)|^{s-5} \exp\Big(2\pi\sqrt{-1} \sum_{1 \le i < j < k \le 6} x_{ijk} y_{ijk}\Big) dX$$

$$= (2\pi)^{-4s+8} \Gamma(s) \Gamma(s - \tfrac{3}{2}) \Gamma(s - \tfrac{5}{2}) \Gamma(s-4)$$

$$\{-2 \sin 2\pi s\} \, |f(Y)|_{+}^{-s}$$

$$\int_{V_-} |f(X)|^{s-5} \exp\Big(2\pi\sqrt{-1} \sum_{1 \le i < j < k \le 6} x_{ijk} y_{ijk}\Big) dX$$

$$= (2\pi)^{-4s+8} \Gamma(s) \Gamma(s - \tfrac{3}{2}) \Gamma(s - \tfrac{5}{2}) \Gamma(s-4)$$

$$\{2 \sin 2\pi s\} \, |f(Y)|_{-}^{-s}$$