数理解析研究所講究録
第 249 巻 1975 年 22-26

Intertwining operatorの超局所性について

広大 理学部 岡本 清郷
木幡 篤孝
田中 誠

Gを連結半単純リー群とし，$G=\bigcup_{w\in W} MANwMAN$をその Bruhat分解とする。Aのリー環を$\mathfrak{a}$とし,その dual spaceを$\mathfrak{a}^*$と表わす。任意の$\lambda\in\mathfrak{a}^*$に対し$\chi_\lambda(man)=e^{(-i\lambda+\rho)(\log a)}$により$MAN$の指標$\chi_\lambda$を定義する。Bruhatの理論から$B(L_\lambda)$から$B(L_\mu)$への任意のIntertwining operatorは

(*) $\mathfrak{f}\in B(G)$, $\mathfrak{f}(mangm'a'n')=e^{(i\lambda+\rho)(\log a)}e^{(i\mu-\rho)(\log a')}\mathfrak{f}(g)$

なるhyperfunction $\mathfrak{f}$を核函数とするIntegral operatorで~~ある~~表わされることが分る。今，$B(L_\lambda)\ni\varphi\leftrightarrow(\varphi_w)_w$ $\varphi_w\in B(\bar{N})$という同一視を，$\varphi(wxman)=\chi_\lambda(man)^{-1}\varphi_w(x)$, $x\in\bar{N}$によって行う。最近，柏原氏によってIntertwining operatorを超局所的に研究するprogramが作られた。ここでは次の様な群について，そのアイデアを述べる。$G=SL(2,\mathbb{R})$ $SL(3,\mathbb{R})$, $SO_0(n,1)$, $SU(n,1)$, $Sp(2,\mathbb{R})$。

$G=SL(2,\mathbb{R})$のとき; $G=\bar{N}MAN\cup w_0\bar{N}MAN$.

$w_0=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ $\varphi\in B(L_{-i\lambda,\delta})$ に対して、$\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\x&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-x&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-x&1\\0&-\frac{1}{x}\end{bmatrix}$ であるから、$\varphi_0(x)=|x|^{\lambda-1}\varphi_\infty(y)$, $y=-1/x$ 。次に、(*) を充たす f に対して、N と A の作用によって微分方程式を作る。

$$\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\x&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\x/(1+tx)&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+tx&t\\0&1/(1+tx)\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}e^{-t/2}&0\\0&e^{t/2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\x&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\e^{t}x&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t/2}&0\\0&e^{t/2}\end{bmatrix}$$

$$f_0(x)=|1+tx|^{\mu-1}f_0(x/(1+tx)),\quad f_0(e^t x)=e^{(\mu-\lambda-2/2)t}f_0(x)$$

$t=0$ における微係数を取ると、

$$\begin{cases}\left(x\dfrac{d}{dx}+\dfrac{\lambda-\mu+2}{2}\right)f_0(x)=0\\[2mm] \left(x^2\dfrac{d}{dx}-(\mu-1)x\right)f_0(x)=0\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y-t&1\\-1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}e^{t/2}&0\\0&e^{-t/2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{t}y&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-\frac{1}{2}t}&0\\0&e^{\frac{1}{2}t}\end{bmatrix}$$

$f_\infty(y)=f_\infty(y-t)$, $f_\infty(e^t y)=e^{\frac{\lambda+\mu}{2}t}f_\infty(y)$ $t=0$ における微係数を取ると、

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dy}f_\infty(y)=0\\[2mm] \left(y\dfrac{d}{dy}-\dfrac{\lambda+\mu}{2}\right)f_\infty(y)=0\end{cases}$$

上の微分方程式系から $f_\infty(y)=\text{const.}$

1) $\lambda+\mu\neq 0$ のとき $f_\infty(y)=0$

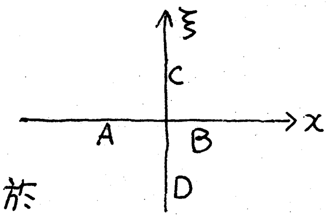
i) $\lambda\neq\mu$ のとき $f=0$ ii) $\lambda=\mu$ のとき $f_0(x)=c\delta(x)$

2) $\lambda+\mu=0$ のとき

i) $\lambda\neq 0,1,2,\cdots$ のとき $f_0(x)=c\,|x|^{-\lambda-1}$

ii) $\lambda=0$ のとき $f_0(x)=c_1P(\frac{1}{x})+c_2\delta(x)$ 一方 transition function から $f_0(x)=c_2\delta(x)$ iii) $\lambda=1$ のとき $f_0(x)=c_1P(\frac{1}{x^2})+c_2\delta'(x)$ $\cdots\cdots$

上の微分方程式系のcharacteristic varietyの各既約成分上，方程式系がmultiplicity 1 であるから解は1次元である。更に，ここで最も重要なのは『λが整数でないときは上の微分方程式系の点$(x,\xi)=(0,0)$の近傍に於ける解はA，B，に於ける値を与えればC，D，に於ける値がそれぞれ一意的に決定される。』ということである。



次に，Intertwining operatorがmicro-local operatorであるかどうか調べる。

1) $G=SL(2,\mathbb{R})$

$w_0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，$|x|^\lambda$のconvolution すなわち$|x-y|^\lambda$がIntertwining operatorの核函数である。従ってmicro-local operatorである。

2) $G=SL(3,\mathbb{R})$

$w_0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，$|z|^\lambda|z-xy|^\mu$のconvolution，すなわち$|w-z-y(u-x)|^\lambda|w-z-v(u-x)|^\mu$がIntertwining operatorの核函数であるが，これのSingular supportはanti-diagonal Δ^aに含まれない。従って，micro-local operatorではない。

3) $G=SO_0(n,1)$　$w_0=\begin{bmatrix}-1 & & & & \\ & -1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1\end{bmatrix}$，$(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2)^\lambda$

Intertwining operatorの核函数は $\left((u_1-x_1)^2+\cdots+(u_{n-1}-x_{n-1})^2\right)^{\lambda}$ である。$(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2)^{\lambda}$ の充たす微分方程式を作ると、

$$\begin{cases} (x_1 D_{x_1}+\cdots+x_{n-1}D_{x_{n-1}}-2\lambda)u=0 \\ (x_j D_{x_i}-x_i D_{x_j})u=0 \qquad i<j \end{cases}$$

従って、Intertwining operator の Singular support は anti-diagonal Δ^a に含まれているから、micro-local operator である。

4) $G=SU(n,1)$

$$w_0=\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad (|y|^4+s^2)^{\lambda},\ y=(y_1,\cdots,y_{n-1})$$

y_i : complex, s : real

Intertwining operatorの核函数は $f^{\lambda}=\left(|z-y|^4+4(u-s+\mathrm{Im}(z,y))^2\right)^{\lambda}$

$z=(z_1,\cdots,z_{n-1})$, $y=(y_1,\cdots,y_{n-1})$, z_i, y_i ; complex

u, s ; real である。f^{λ}の充たす微分方程式を作ると、

$$\begin{cases} \left(f\dfrac{\partial}{\partial(\mathrm{Re}\,z_j)}-\lambda\dfrac{\partial f}{\partial(\mathrm{Re}\,z_j)}\right)f^{\lambda}=0 \qquad 1\leq j\leq n-1 \\ \left(f\dfrac{\partial}{\partial(\mathrm{Im}\,z_j)}-\lambda\dfrac{\partial f}{\partial(\mathrm{Im}\,z_j)}\right)f^{\lambda}=0 \\ \left(f\dfrac{\partial}{\partial(\mathrm{Re}\,y_j)}-\lambda\dfrac{\partial f}{\partial(\mathrm{Re}\,y_j)}\right)f^{\lambda}=0 \\ \left(f\dfrac{\partial}{\partial(\mathrm{Im}\,y_j)}-\lambda\dfrac{\partial f}{\partial(\mathrm{Im}\,y_j)}\right)f^{\lambda}=0 \\ \left(f\dfrac{\partial}{\partial u}-\lambda\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)f^{\lambda}=0 \\ \left(f\dfrac{\partial}{\partial s}-\lambda\dfrac{\partial f}{\partial s}\right)f^{\lambda}=0 \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial(\mathrm{Re}\,z_j)}+\dfrac{\partial}{\partial(\mathrm{Re}\,y_j)}-\dfrac{1}{2}(-\bar{y}_j+y_j+\bar{z}_j-z_j)\dfrac{\partial}{\partial u}\right)f^{\lambda}=0 \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial(\mathrm{Im}\,z_j)}+\dfrac{\partial}{\partial(\mathrm{Im}\,y_j)}+(-\bar{y}_j-y_j+\bar{z}_j+z_j)\dfrac{\partial}{\partial u}\right)f^{\lambda}=0 \end{cases}$$

$$l\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial s}\right)f^{\lambda}=0$$

従って、Intertwining operator の Singular support は anti-diagonal Δ^a に含まれるから、f^λは micro-local operator である。

5) $G = Sp(2, \mathbb{R})$

$$w_0=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

Intertwining operator は、$|y|^{\lambda}\begin{vmatrix} y & z \\ z+xw & w \end{vmatrix}^{\mu}$ である。

この場合も、$SL(3,\mathbb{R})$の場合と同様に micro-local operator ではない。

終