数理解析研究所講究録
第 254 巻 1975 年 99-107

Anosov diffeomorphism について

都立大 理 岡部 恒治

§定義

Anosov diffeo は，Morse-Smale diffeo の他に structually stable な diffeo はないか？ という疑问に対して，提出されたものである。

今，T^2（2次元 torus）を R^2 に $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ で quotient した空间と考える。$\hat{f}: R^2 \longrightarrow R^2$ なる linear map を matrix

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えておく。 この $\hat{f}$ は整係数 matrix であるから，$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ に写す。 よって，この $\hat{f}$ から，

$$f: R^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow R^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

なる map が得られる。 ie. $f: T^2 \longrightarrow T^2$ なる map が得られたわけである。 容易に，f が diffeo であることがわかる。 このような diffeo を toral automorphism という。

このdiffeoはmatrixの固有値$1-\sqrt{2}$に対応する固有空間の方向に関しては縮んでゆき，$1+\sqrt{2}$の固有空間方向に対しては伸びてゆく性質をもっている。このような写像は，明らかに，少々のperturbationによっても，この性質を変えないだろうと推測される。よって，このmapの性質を抜き出したものがstructually stableであろうということは予想されて当然であり，実際Anosovによって証明されたのである。

<定義> MをRiemann manifold

$$f : M \longrightarrow M \quad \text{diffeo}$$

fがAnosov diffeo

$\Longleftrightarrow$

(i) $T(M)$ (Mのtangent bundle)が$T(f)$不変な2つのsubbundleのWhitney sumになる。即ち，$E^u, E^s \subset T(M)$があって，$T(M)=E^u \oplus E^u$, $T(f)(E^u)=E^u$, $T(f)(E^s)=E^s$, [ここで$T(f)$はfの微分]

(ii) 定数 $c>0$, $\lambda>1$ を適当に取ることが出来て，$\forall m \in N$ (自然数)に対して，

$$|T(f)^m(x)| \geqq c\lambda^m |x| \quad , x \in E^u$$
$$|T(f)^m(x)| \leqq c^{-1}\lambda^{-m} |x| \quad , x \in E^s$$

§ 構成法

Anosov diffeo を理解するために，最も（知られているうちで）一般的な構成法を紹介する。

- N を simply connected nilpotent Lie group (*)
- $K \subset Aut(N) (= \{ f : N \to N$ Lie group isomorphism $\})$
  特に K finite としておく.
- $N \circ K$ を N と K の semi direct product（即ち set としては，$N \circ K = \{(x, a) \mid x \in N, a \in K\}$ であって，group operation が，$(x, a) \cdot (y, b) = (x a(y), ab)$ なるもの）とする。
- $\Gamma \subset N \circ K$ を uniform discrete group (i.e. $N \circ K / \Gamma$ compact) であって，torsion free（位数有限 ⇒ 単位元）とする.

Auslander [1] の結果から直ちに，$\Gamma \cap N$ は N の sub group として，uniform discrete である。また，$N \circ K$ の元 g は N に次のように作用する．$g = (x, a)$ $(x \in N, a \in K)$ と考えて，

$$\begin{array}{rccc} g : & N & \longrightarrow & N \\ \rotatebox{90}{$=$}\;\; & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x, a) & y & \longmapsto & x a(y) \end{array}$$

，$\Gamma \cap N$ の元は (x, e) $(x \in N, e \in K)$ と考えられる（e は単位元）から，$N \ni y$ を $xy \in N$ に写すように作用する。

(*)「nilpotent Lie group であることが必要である」という点に関しては後藤守邦氏の明解な解説を参照されたい。[2]

よって，次の onto map の 列が出来る。

$$N \xrightarrow[p_1]{} N/(\Gamma\cap N) \xrightarrow[p_2]{} N/\Gamma$$

しかるに，$N/(\Gamma\cap N)$ が compact であるから，N/Γ も compact である。

一方，再び Auslander の結果から，Γ は N に free act がわかり，N/Γ が manifold となり，p_1, p_2 はともに，covering map であることがわかる。p_2の covering transformation gr. は $\Gamma/(\Gamma\cap N)$ であるから，finite であって，

$\pi_1(N/\Gamma) \cong \Gamma$, がわかる。

さて，$h: N\circ K \longrightarrow N\circ K$ automorphism であって，

$$\begin{cases} \text{(i)} & h(\Gamma)=\Gamma \\ \text{(ii)} & h(N)=N \\ \text{(iii)} & h|N \text{ が hyperbolic} \end{cases}$$

なる条件を満すものを考えると，右図のような可換な diagram を作ることが出来る（但し，$\bar{h}$，$\bar{\bar{h}}$ は h によって，natural に出来る map）

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "h|N"] \arrow[d, "p_1"] & N \arrow[d, "p_1"] \\ N/(\Gamma\cap N) \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[d, "p_2"] & N/(\Gamma\cap N) \arrow[d, "p_2"] \\ N/\Gamma \arrow[r, "\bar{\bar{h}}"] & N/\Gamma \end{tikzcd}$$

この $\bar{\bar{h}}$ を hyperbolic infranil manifold automorphism といい，N/Γ を infranil manifold と呼ぶ。$\bar{\bar{h}}$ は Anosov map になっていることがわかる。

§ Shub の例

ここでは前§の構成法に一つの実例を見る。Nを(3×3)-matrix の pair から成る次のような manifold.

$$N=\left\{\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\c&b&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\d&1&0\\f&e&1\end{pmatrix}\right)\middle|\ a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}\right\}$$

Nは$\mathbb{R}^6$と homeo である。Nに普通の product operation を考える（即ち，$(A,B)\cdot(C,D)=(AC,BD)$）と，Lie group の構造を持っていることがわかる。

さて，$\mathbb{Z}[\sqrt{3}]=\{m+n\sqrt{3}\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$ なる$\mathbb{R}$の中の sub group を考えておく。$\mathbb{Z}[\sqrt{3}]\ni\alpha=m+n\sqrt{3}$ の共役 $\bar{\alpha}$ を $m-n\sqrt{3}$ で定義する。ここでΓ_0を次のように決める。

$$N\supset\Gamma_0=\left\{\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\\alpha&1&0\\\gamma&\beta&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\\bar{\alpha}&1&0\\\bar{\gamma}&\bar{\beta}&1\end{pmatrix}\right)\middle|\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}[\sqrt{3}]\right\}$$

このΓ_0は uniform discrete subgroup である。

一方，$B:N\longrightarrow N$ なる Automorphism を次のように定義する。

$$B:\quad\begin{array}{ccc}N&\longrightarrow&N\\\cup\!\!\!\shortmid&&\cup\!\!\!\shortmid\\\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\c&b&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\d&1&0\\f&e&1\end{pmatrix}\right)&\longmapsto&\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\-a&1&0\\+c&-b&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\-d&1&0\\f&-e&1\end{pmatrix}\right)\end{array}$$

$B^2=id$ であるから，$\{B,id\}$ は group を作る。今，$\{B,id\}=K$ とおく。

次に，$\Gamma \subset N \circ K$ を作る．まず，$\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ とおく．(これは $\omega \notin \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, $2\omega \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ を満す)．さらに，この ω を用いて，$B_1 = \left(\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\omega&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\bar{\omega}&0&1\end{pmatrix}\right], B\right) \in N\circ K$ とおく．

さて，$\Gamma = \{\Gamma_0$ と B_1 で generate される sub group$\} \subset N\circ K$ とすると，直ちに，($2\omega \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ より) $\Gamma = \Gamma_0 \cup B_1\Gamma_0$ がわかる．

最後に定義すべきものは map $h : N\circ K \longrightarrow N\circ K$ である。その為に，$k = 2+\sqrt{3}$ とおき（$k\bar{k} = 1$ を満している）

$$h : N\circ K \longrightarrow N\circ K$$

$$\left(\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\c&b&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\d&1&0\\f&e&1\end{pmatrix}\right], H\right) \longmapsto \left(\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\\bar{k}a&1&0\\kc&\bar{k}^2b&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\kd&1&0\\\bar{k}f&\bar{k}^2b&1\end{pmatrix}\right], H\right)$$

(但し $H \in K$)

この map h は，(i),(ii),(iii) の条件を満たしている。((i) の条件の為に，$(k-1)\omega \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ となるようにあらかじめ ω を取っておいた。又，(iii) のために，$k>1$, $0<\bar{k}<1$ としておいた。) よって，hyperbolic infranilmanifold Automorphism $\bar{h} : N/\Gamma \longrightarrow N/\Gamma$ が構成された。しかも $\pi_1(N/\Gamma) \cong \Gamma$ であるから，N/Γ は明らかに torus とは違う manifold である。

§ 存在，分類 etc.

他の map と同じように，Anosov diffeo についても，同値関係を入れて議論する。

〈定義〉

$f: M \longrightarrow M$

$g: N \longrightarrow N$ なる2つの Anosov diffeo が

<u>topologically conjugate</u> とは，

$\exists h: M \longrightarrow N$ なる homeo があって，次の図式が可換であるときにいう。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ N & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

<u>即ち，$g \circ h = h \circ f$</u>

このとき，$f \overset{t}{\sim} g$ と書く。

Anosov diffeo について基本的な問題は，

> すべての Anosov diffeo を top conjugacy で分類せよ。

という問題である。 この問題と並んで重要な問題は，

> Anosov diffeo を持つような多様体はどういう多様体か？

である。

[話の都合上，これから「manifold」は全て，compact, without boundary とする。]

先ほどの§で述べたように infranilmanifold には，Anosov diffeo が存在している。今まで知られている manifold は全て Lie group をある種の subgroup で割って得られている。しかし，これ以外の多様体が存在するのか？あるいは存在しないのか？ は未だ判明していない。Shiraiwa は [3] に於いて，homology group による条件を用いて，いくつかの manifold が Anosov diffeo を持ち得ない事を示した。例えば，rational homology sphere, lens space, projective space, $S^{2n}\times S^{2n}$, $Spin(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, ... etc. には Anosov diffeo が存在しない。

一方，top conjugate による分類は Smale, Franks, Newhouse 等が着々と成果を収めて来た。中でも目ざましいのは Mannings である。彼は [4] に於いて，次の定理を証明した。

〈定理〉　(Mannings)

M を inframilmanifold (或いは torus と思ってよい)
$f: M \longrightarrow M$ Anosov diffeo
$\Rightarrow$ f は hyperbolic inframilmanifold Auto
(或いは hyperbolic toral auto)

— Reference —

[1] L. Auslander, "Bieberbach's Th on Space Groups and ...." Annals of Math., 71 (1960)

[2] M. Goto, この講究録に載るであろう.

[3] K. Shiraiwa, "Some condition on Anosov diffeo" Manifolds Tokyo (1973.)

[4] Manning "There are no new Anosov diffeo on Tori"