数理解析研究所講究録
第254巻 1975年 189-192

Smaleの力学系
—— 微分不等式による特徴づけ

名大教養　大和一夫

§1. Introduction

力学系（常微分方程式）が与えられたとき，その解曲線の定性的性質を知る実際的方法を考える。もちろんそれは常に可能であるわけではないが，Smaleが考えた力学系に対してくらいなら，その力学系を定義する微分方程式の係数に関する微分不等式をとおして，解曲線の定性的性質を知ることができる。ここでは簡単のため，力学系Xが非特異で，各点xでの方向ベクトルX_xのノルム$\|X_x\|$が一定で，更にnormal tangent plane $X^\perp$はXによって保たれる場合を考える。（このようなXをregularとよぶことにする。）

§2. Theorem

M^n：コンパクトリーマン多様体，$\pi: TM \to M$：接バンドル

g：リーマンテンソル，gからきまるノルム$\|\ \|$，

X：M上のベクトル場，そのone-para. transf. group $\{\varphi_t\}$.

に対して

$$\Pi = \left\{ v \in TM \;\middle|\; \|v\| = 1,\ (i_X g)(v) = 0,\ (\mathcal{L}_X g)(v,v) = 0 \right\}$$

とおく．但し，$\mathcal{L}_X$: Lie 微分，i_X : 内部積作用素，$(i_X g)(v) \overset{\mathrm{def}}{=} g(X, v)$.
幾何学的には，Π の元は二つの無限に近い解曲線が平行になる方向をあらわす．Π は M の tangent sphere bundle の余次元 2 の submanifold としてよい．

<u>Theorem</u> 与えられたベクトル場 X が regular とする．(すなわち X が nonsingular でかつ $\mathcal{L}_X i_X g = 0$.)

$$\Pi_\Theta = \left\{ v \in \Pi \;\middle|\; (\mathcal{L}_X^2 g)(v,v) \leq 0 \right\},$$
$$\mathcal{J} = \pi(\Pi_\Theta),$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{J}^c = M - \mathcal{J},$$

とおく．次の二つの条件を考える：

<u>Condition NE</u>

$$(\mathcal{L}_X^2 g)(v,v) < 0 \quad \text{for } v \in \Pi \text{ s.t. } (\mathcal{L}_X g)(v,u) = 0 \quad \forall u \in X^\perp.$$

<u>Condition TR</u> 次の性質をみたす $f : M \to \mathbb{R}$，定数 $\delta > 0$ がとれる：$M(\delta) = \{ x \in M \mid |f(x)| \leq \delta \}$ とおくと，

(a) $f^{-1}(0) = \{ x \in M \mid \det(\mathcal{L}_X g)_x = 0 \}$,

(b) $\mathcal{J} \subset M(\delta)$,

(c) $\mathcal{L}_X^2 f(x) \lesseqgtr 0$ for $x \in M(\delta)$ s.t. $f(x) \gtrless 0$ and $\mathcal{L}_X f(x) = 0$.

この二つの条件がみたされているとき，X は Smale の Axiom A と nocycle property をみたし，その nonwandering set Ω について，$\Omega \subset I(M^c(\delta))$．但し $I(M^c(\delta)) = \{x \in M^c(\delta) \mid \phi_t(x) \in M^c(\delta)\ \forall t \in \mathbb{R}\}$．(注1)

注1．Ω, $I(M^c(\delta))$ の位相的性質を実際的に決定する方法は存在する．実際，$M^c(\delta) \subset M^n$ は境界をもった n 次元 submanifold で X に関して凸になっていること（性質(c)），$I(M^c(\delta))$ は hyperbolic set であること（性質(b)）に注意すると，X の $M^c(\delta)$ への入りこみ方と出方から調べられる．（$M^c(\delta)$ は Conley-Easton の意味で $I(M^c(\delta))$ の isolating block になっている．）

§3. 証明のための補題．

Lemma 1.

(i) $(\mathcal{L}_X g)(v,v) = \dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \|\phi_{t*} v\|^2$,

(ii) $(\mathcal{L}_X^2 g)(v,v) = \dfrac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \|\phi_{t*} v\|^2$.

Lemma 2. Theorem の仮定のもとで，$I(M^c(\delta))$ は closed, invariant set である．更に，hyperbolic structure をもちその各連結成分での type は二次型式 $\mathcal{L}_X g : X^\perp \times X^\perp \to \mathbb{R}$ の Morse index できまる．

Lemma 3. $\mathcal{T}$ のどの点 x も wandering である．i.e., $\exists U : x$ の nbd, $\exists T > 0$, $\phi_t(U) \cap U = \phi$ $\forall t$, $|t| \geqq T$.

Lemma 4　tangent vector v が Condition NE をみたしているとする．x を v の base point $\pi(v)$ とする．このとき，$\mathcal{L}_X g$ は $X_x^\perp$ 上の二次形式として退化している．そして $x_\pm = \phi_{\pm 0}(x)$ 上の fibre $X_{x_\pm}^\perp$ では $\mathcal{L}_X g$ は非退化でその Morse index は x_- においてよりも x_+ においての方が大きくなっている．

Lemma 5　同じ type の hyperbolic sets の stable manifold と unstable manifold は strong transversal である．

§4. Remarks

Remark 1.　Ω と $M^c(\delta)$ の関係がよく判れば，例えば Morse 不等式が得られる．

Remark 2.　我々が以前に考えた "almost Anosov system" ("quasi Anosov" とよんだ方がよいと思う) は次のように特徴づけられる：定数 $\varepsilon > 0$ に対して

$$\Pi(\varepsilon) = \left\{ v \in TM \;\middle|\; \|v\| = 1, (i_X g)(v) = 0, \left|(\mathcal{L}_X g)(v, v)\right| = \varepsilon \right\}$$

とおく．もし

$$(\mathcal{L}_X^2 g)(v, v) > 0 \quad \text{for } \forall v \in \Pi(\varepsilon)$$

かつ，$\Pi(\varepsilon)$ が singularities のない fibre bundle ならば X は quasi Anosov である．