数理解析研究所講究録
第 255 巻 1975 年 23-32

周期的 exp-格子に対する Kac-Moerbeke の解法

千葉大 理物理 戸田盛和

§1. exp-格子

exp-格子の運動方程式は

$$\frac{d^2Q_n}{dt^2}=e^{-(Q_n-Q_{n-1})}-e^{-(Q_{n+1}-Q_n)} \tag{1}$$

あるいは

$$\begin{aligned}\dot{a}_k &= a_k(b_k-b_{k-1})\\ \dot{b}_k &= 2(a_k^2-a_{k+1}^2)\end{aligned} \tag{1'}$$

ただし

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{2}e^{-(Q_k-Q_{k-1})/2}\\ b_k &= -\frac{1}{2}p_k\end{aligned} \tag{1''}$$

と書ける。

最近，周期条件

$$a_{k+n}=a_k\ ,\quad b_{k+n}=b_k \tag{2}$$

のもとで，この運動方程式を解く方法が，Kac と Moerbeke

によって提出されている．そのあらましを述べたい。叙述の順序や記号などは Kac らのをかならずしも用いない．

§2 Floquet の定理の拡張

Hill の常微分方程式に対する Floquet の定理を，exp 格子の定差方程式に拡張する．そのため周期的な係数 a_k，b_k に対する定差方程式

$$a_k y(k)+a_{k+1}y(k+2)+b_k y(k+1)=\lambda\, y(k+1) \tag{3}$$

$$a_{k+n}=a_k\,,\quad b_{k+n}=b_k\,,\quad \lambda=\text{任意}$$
$$-\infty<k<\infty$$

を考え，$k=0,1$ における境界条件

$$y^{(1)}(0)=1,\quad y^{(1)}(1)=0 \tag{4}$$

を充たす解 $y^{(1)}(k)$ と，

$$y^{(2)}(0)=0,\quad y^{(2)}(1)=1 \tag{4'}$$

を充たす解 $y^{(2)}(k)$ とを基本解とする。この条件で $k=0$ から逐次解くことにより，次式が示される．

$$y^{(1)}(n+1)=-\frac{\lambda^{n-1}}{a_1a_2\cdots a_{n-1}}+O(\lambda^{n-2}) \tag{5}$$

$$y^{(2)}(n+1)=\frac{\lambda^{n}}{a_1a_2\cdots a_n}+O(\lambda^{n-1}) \tag{5'}$$

また $y^{(1)}, y^{(2)}$ に対する (3) 式を連立させて λ を消去し

$$a_k\{y^{(1)}(k)y^{(2)}(k+1)-y^{(1)}(k+1)y^{(2)}(k)\}$$
$$=a_{k+1}\{y^{(1)}(k+1)y^{(2)}(k+2)-y^{(1)}(k+2)y^{(2)}(k+1)\} \tag{6}$$

を得る．これは Wronskian に相当する式である．(4) を用い，周期が n ($a_n=a_0$) であることを用いれば (6) から

$$y^{(1)}(n)y^{(2)}(n+1)-y^{(1)}(n+1)y^{(2)}(n)=1 \tag{7}$$

を得る．

一方で，基本解で展開して

$$y^{(1)}(k+n)=a_{11}y^{(1)}(k)+a_{12}y^{(2)}(k)$$
$$y^{(2)}(k+n)=a_{21}y^{(1)}(k)+a_{22}y^{(2)}(k) \tag{8}$$

と書くと，$k=0,\ 1$ とおいて係数は

$$a_{11}=y^{(1)}(n) \qquad a_{12}=y^{(1)}(n+1)$$
$$a_{21}=y^{(2)}(n) \qquad a_{22}=y^{(2)}(n+1) \tag{8'}$$

したがって (7) を書き直せば

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1 \tag{9}$$

さて擬周期解を

$$y(k+n)=\alpha y(k) \tag{10}$$

とする．この解を基本解により

$$y(k)=c_1y^{(1)}(k)+y^{(2)}(k) \tag{11}$$

と書き，(10) の左辺を (11) と (8) とを用いて書き直せば

$$\det(a_{ij}-\alpha\delta_{ij})=0$$

したがって (9) により α は

$$\alpha^2 - \Delta(\lambda)\,\alpha + 1 = 0 \qquad (12)$$

の根であることがわかる。ここにパラメタ λ を陽に書いて

$$\Delta(\lambda) = a_{11} + a_{22} = y^{(1)}(n, \lambda) + y^{(2)}(n+1, \lambda) \qquad (13)$$

周期解 $\alpha = 1$ を与える固有値 λ_j は（安定解不安定解の境）

$$\Delta(\lambda_j) = 2 \qquad (14)$$

で与えられる。(5) と (13) とを用いれば (14) により

$$\Delta(\lambda) = 2 + 2^n \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j) \qquad (15)$$

と書けることがわかる。ここで $a_1 a_2 \cdots a_n = 1/2^n$ ((1)参照)を用いた。

a_k, b_k が運動方程式 (1') にしたがって時間発展をするとき，固有値 λ_j は時間によらない。これはよく知られたことである。

§3. $n-1$ 個の力学量 μ_s

周期 n の場合，粒子数は n で，変位，運動量をあわせて自由度は $2n$ であるが，全系の一様な移動（回転）は問題外であるから相対変位が $n-1$，運動量が n 個あって自由度は $2n-1$ 個である。固有値 λ_j は n 個あり，運動の定数である。したがって，何か $n-1$ 個のものが時間の関数として与えられれば問題は解けたことになる。ここで λ_j は

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} b_n & a_1 & & & a_n \\ a_1 & b_1 & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix} \tag{16}$$

の固有値であることが示される．そこで1行1列小さな

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} b_1 & a_2 & & 0 \\ a_2 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix} \tag{17}$$

の固有値を $\qquad \mu_s \qquad (s=1, 2, \ldots, n-1) \qquad$ (17′)

とする．μ_s は時間の関数である．$\mathcal{L}'$ の固有関数は

$$\phi(k, \mu_s) = -\frac{a_1}{a_n}\, y^{(1)}(k+1, \mu_s) \tag{18}$$

$$(k=1, 2, \ldots, n-1)$$

であることが示される．ただし因子 $-a_1/a_n$ は $\phi(1, \mu_s)=1$ になるようにとった。また，μ_s は境界条件

$$\phi(0, \mu_s) = \phi(n, \mu_s) = 0$$

あるいは $\qquad y^{(1)}(1, \mu_s) = y^{(1)}(n+1, \mu_s) = 0 \qquad$ (19)

を方程式(3)に付けたときの固有値である．

(19)と(7)と(13)とから

$$\Delta(\mu_s) = y^{(1)}(n, \mu_s) + \frac{1}{y^{(1)}(n, \mu_s)} \tag{20}$$

したがって $\qquad |\Delta(\mu_s)| \geq 2 \qquad$ (21)

であり，μ_s は(3)の解の不安定領域にある．

また (21) から

(複号±の選び方不明)

$$y^{(1)}(n,\mu_s) = \frac{\Delta(\mu_s) \pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s)-4}}{2} \tag{22}$$

さて,

$$\dot{y}(k) = \frac{d}{d\lambda}\, y(k,\lambda) \tag{23}$$

と書くと

$$a_k y^{(1)}(k) + a_{k+1} y^{(1)}(k+2) = (\lambda - b_k)\, y^{(1)}(k+1)$$

$$a_k \dot{y}^{(1)}(k) + a_{k+1} \dot{y}^{(1)}(k+2) = y^{(1)}(k+1) + (\lambda - b_k)\, \dot{y}^{(1)}(k+1)$$

これを用いて

$$[y^{(1)}(k+1)]^2 = a_k \left\{ \dot{y}^{(1)}(k)\, y^{(1)}(k+1) - y^{(1)}(k)\, \dot{y}^{(1)}(k+1) \right\}$$
$$- a_{k+1} \left\{ \dot{y}^{(1)}(k+1)\, y^{(1)}(k+2) - y^{(1)}(k+1)\, \dot{y}^{(1)}(k+2) \right\}$$

これを加えて (19) を用いると

$$\sum_{k=1}^{n-1} [y^{(1)}(k+1,\mu_s)]^2 = a_n\, y^{(1)}(n,\mu_s)\, \dot{y}^{(1)}(n+1,\mu_s) \tag{24}$$

一方で (5) を使えば

$$y^{(1)}(n+1,\lambda) = -\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \prod_{s=1}^{n-1} (\lambda - \mu_s) \tag{25}$$

したがって

$$P(\lambda) = \prod_{s=1}^{n-1} (\lambda - \mu_s) \tag{26}$$

$$P'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} P(\lambda) \tag{26'}$$

とおくと

$$\sum_{k=1}^{n-1} [Y^{(1)}(k+1, \mu_s)]^2 = -\frac{a_n}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} P'(\mu_s) \frac{\Delta(\mu_s) \pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s)-4}}{2}$$

これを用いて (18) を規格化できる. $a_1 a_2 \cdots a_n = 1/2^n$ であるから

$$l^2(\mu_s) = -2^n a_1^2 \, P'(\mu_s) \frac{\Delta(\mu_s) \pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s)-4}}{2} \tag{27}$$

とおけば

$$\psi_s(k) = \frac{\phi(k, \mu_s)}{l(\mu_s)} \tag{28}$$

は規格直交系を作る. すなわち

$$\sum_{k=1}^{n-1} \psi_s(k)\, \psi_{s'}(k) = \delta_{s,s'} \tag{29}$$

$$\sum_{s=1}^{n-1} \psi_s(k)\, \psi_s(k') = \delta_{k,k'} \tag{29'}$$

$k=k'=1$ とおくと $\displaystyle \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{l^2(\mu_s)} = 1$ (30)

よって (27) により

$$a_1^2 = -2^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\delta(\mu_s)}{P'(\mu_s)} \tag{31}$$

ここに

$$\delta(\mu_s) = \frac{1}{\Delta(\mu_s) \pm \sqrt{\Delta^2(\mu_s)-4}} = \frac{\Delta(\mu_s) \mp \sqrt{\Delta^2(\mu_s)-4}}{2} \tag{32}$$

μ_s の時間変化が与えられれば (31) は a_1^2 を与える. 他

の a_k は (17) の固有関数が ψ であるから

$$a_k = \sum_{s=1}^{n-1} \mu_s \psi_s(k-1)\psi_s(k) \qquad (k=2,\cdots,n-1) \tag{33}$$

で与えられる. a_n は $a_1 a_2 \cdots a_n = 1/2^n$ により定まる.

同様に

$$b_k = \sum_{s=1}^{n-1} \mu_s \psi_s^2(k) \qquad (k=1,2,\cdots,n-1) \tag{34}$$

b_n は trace の式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$ (35)

を用いてきめられる.

§4. μ_s の時間変化

$\mathcal{L}'$ をさらに1行1列縮めたマトリックス

$$\mathcal{L}'' = \begin{pmatrix} b_1 & a_2 & & 0 \\ a_2 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ 0 & & a_{n-2} & b_{n-2} \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}'' = \begin{pmatrix} b_2 & a_3 & & \\ a_3 & b_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix} \tag{37}$$

を用いると

$$\frac{d}{dt}\det(\mathcal{L}'-\lambda 1) = 2\left\{a_n^2 \det(\mathcal{L}''-\lambda 1) - a_1^2 \det(\tilde{\mathcal{L}}''-\lambda 1)\right\} \tag{38}$$

および

$$a_1^2 a_n^2 \det(\mathcal{L}''-\mu_s 1)\det(\tilde{\mathcal{L}}''-\mu_s 1) = 1/2^{2n} \tag{39}$$

を示すことができる (証略). $n=3, 4$ のときはすぐ確かめられる.

また　$$\Delta^2(\mu_s)-4 = 2^{2n}\{a_1^2\det(\mathcal{L}''-\mu_s 1) - a_n^2 \det(\tilde{\mathcal{L}}''-\mu_s 1)\}^2 \quad (40)$$
を示すことができる. (38) を用いると
$$\Delta^2(\mu_s)-4 = 2^{2n-2}\left(\frac{d}{dt}\det(\mathcal{L}'-\lambda 1)\right)^2\Big|_{\lambda=\mu_s} \quad (41)$$

一方で $\mathcal{L}'$ の固有値が μ_s であることを用いて ((26)参照)
$$\det(\mathcal{L}'-\lambda 1) = (-1)^{n-1} P(\lambda) \quad (42)$$
したがって
$$\frac{d}{dt}\det(\mathcal{L}'-\lambda 1)\Big|_{\lambda=\mu_s} = (-1)^{n-1} P'(\mu_s)\frac{d\mu_s}{dt} \quad (43)$$

故に　$$\left(P'(\mu_s)\frac{d\mu_s}{dt}\right)^2 = 2^{-2n+2}(\Delta^2(\mu_s)-4) \quad (44)$$

よく知られた関係式
$$\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\mu_s^r}{P'(\mu_s)} = 0 \quad (r=0,1,2,\dots,n-3)$$
$$\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\mu_s^{n-2}}{P'(\mu_s)} = 1 \quad (45)$$
を用いれば　$d\mu_s/dt$　を与える式は Abel の微分形式で
$$\sum_{s=1}^{n-1}\mu_s^r\frac{d\mu_s/dt}{\pm\sqrt{\Delta^2(\mu_s)-4}} = 0$$
$$\sum_{s=1}^{n-1}\mu_s^{n-2}\frac{d\mu_s/dt}{\pm\sqrt{\Delta^2(\mu_s)-4}} = 2^{-n+1} \quad (46)$$
(±記号は $(d\mu_s/dt)/2\sqrt{\Delta^2(\mu_s)-4}$ が $P'(\mu_s)$ と同符号になるようにとる)

と書ける．この積分を μ_s について解くのは Jacobi の逆問題として知られている．これは解けている問題であるから，周期条件のもとでの exp－格子の一般解（初期値問題）は解けたことになる．

文献

M. Kac and P. van Moerbeke

On an explicitly soluble system of non-linear differential equations related to certain Toda lattices
Advances in Math. 16 (1975) 160

On some periodic Toda lattices
Proc. Natl. Ac. Sci. U.S.A. 72 (1975) 1627

A solution of the periodic Toda problem
(preprint.)

M. Kac: The three body Toda problem (private communication to J. Ford)

H. Flaschka and D.W. McLaughlin: Canonically Conjugate Variables for the Korteweg-de Vries Equation and the Toda Lattice with Periodic Boundary Conditions (preprint) これも Kac らの方法をやや別の角度から述べている。ソ聯における数学的仕事の文献もある。