数理解析研究所講究録
第 255 巻 1975 年 42-56

逆問題と正準変換

名大 理　　児玉 裕治

§ 序

Soliton 解をもつ、非線形分散型方程式の初期値問題を、exactに解く方法の1つに、逆散乱法があることは、よく知られている。近年、Ablowitz 等[1]は、逆散乱法で解けうる方程式のクラスを、Systematic に議論した。このクラスには、Korteweg de Vries 方程式、変形 Korteweg de Vries 方程式、非線形 Schrödinger 方程式等が含まれる。これらの方程式に、共通な、注目すべき性質として、無限個の保存量の存在がある。Zakharov 等[2,3]は、このことに関連して、KdV 方程式、非線形 Schrödinger 方程式~~等~~、は、完全積分可能な Hamiltonian System であることを示した。有限自由度 N の Hamiltonian System では、互いに involution にある N コの保存量の存在は、系が完全積分可能であることの必要十分条件である（Liouville の定理）、が、ここで、

考えているような無限次元の系については、無限個の保存量の存在は、系が完全積分可能である為の必要条件のみを与え、一般に、完全積分可能であることを証明することはできない。しかし、逆散乱問題で解きうるという性質を用いることで、一般的に、これらの方程式（Ablowitz等の示した逆散乱法で解くことのできる方程式）が、完全積分可能であることが示せる。

ここでは、逆散乱 Scheme を Ablowitz 等の提出したもの[1]を使い、この Scheme から得られる、非線形方程式を、Hamiltonian System として定義し、一般的に、この System が完全積分可能であることを示す。このとき逆散乱 Scheme は、正準変換であることが示され、初期値問題は、単に、正準変数の 1 parameter t の action として考えられる。

§1 Ablowitz 等の散乱 Scheme と散乱問題.

Potential $q(x,t)$, $r(x,t)$ をもつ1次元 Dirac 型 op. についての散乱問題.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + i\xi \varphi_1 &= q(x,t)\,\varphi_2 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - i\xi \varphi_2 &= r(x,t)\,\varphi_1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

を考える。Ablowitz 等は、φ_1, φ_2 についての時間発展を

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= A\varphi_1 + B\varphi_2 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= C\varphi_1 - A\varphi_2\end{aligned}\right) \qquad (2)$$

の形で定義し、(1),(2)式間の integrability condition をつかって $A(x,t,\xi)$, $B(x,t,\xi)$, $C(x,t,\xi)$ の間の関係より、q、r についての非線形方程式を得た。 まず、(1)式の散乱問題を考える為に、次の Jost 関数を定義する。 for real ξ

$$\left.\begin{aligned}f(x,t,\xi) &\longrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ \bar{f}(x,t,\xi) &\longrightarrow \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} e^{i\xi x}\end{aligned}\right) \quad \text{as} \quad x \to -\infty \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}g(x,t,\xi) &\longrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} e^{i\xi x} \\ \bar{g}(x,t,\xi) &\longrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} e^{-i\xi x}\end{aligned}\right) \quad \text{as} \quad x \to \infty \qquad (4)$$

このとき、f, g は又、次のように表わせる。

$$\left.\begin{aligned}f_1(x,\xi) &= e^{-i\xi x} + \int_{-\infty}^{x} e^{-i\xi(x-s)} q(s) f_2(s,\xi)\, ds \\ f_2(x,\xi) &= \int_{-\infty}^{x} e^{i\xi(x-s)} r(s) f_1(s,\xi)\, ds\end{aligned}\right) \qquad (5)$$

$$g_1(x,\xi) = -\int_{x}^{\infty} e^{-i\xi(x-s)} q(s) g_2(s,\xi)\, ds \qquad) \quad (6)$$

$$g_2(x,\xi) = e^{i\xi x} - \int_x^\infty e^{i\xi(x-s)} r(s) g_1(s,\xi)\,ds \quad)$$

又、g, $\bar{g}$ は (1) 式の一次独立な解であるから、

$$f(x,\xi) = a(\xi)\,\bar{g}(x,\xi) + b(\xi)\,g(x,\xi) \qquad (7)$$

$$\bar{f}(x,\xi) = -\bar{a}(\xi)\,g(x,\xi) + \bar{b}(\xi)\,\bar{g}(x,\xi) \qquad (8)$$

と表わすことが可能である。係数 $a(\xi)$, $b(\xi)$ は、

$$a(\xi) = W[f:g] \quad , \quad b(\xi) = W[\bar{g}:f] \qquad (9)$$

ここで $W[f:g] \equiv f_1 g_2 - f_2 g_1$ なる Wronskian を表わす。Jost 函数 (3), (4) の定義より、$a(\zeta)$ ($\bar{a}(\zeta)$) は上 (下) 半平面に解析接続可能であることがわかる。

$a(\zeta)$, $\bar{a}(\zeta)$ の零点は (1) 式の bound state を意味し、このとき、次の関係が成立する。

$$f(x,\zeta_n) = c_n\, g(x,\zeta_n) \qquad \mathrm{Im}\,\zeta_n > 0 \qquad n = 1, \cdots N_1 \qquad (10)$$

$$\bar{f}(x,\bar{\zeta}_m) = \bar{c}_m\, \bar{g}(x,\bar{\zeta}_m) \qquad \mathrm{Im}\,\bar{\zeta}_m < 0 \qquad m = 1, \cdots, N_2 \qquad (11)$$

これらの組 $S = \{ a, \bar{a}, b, \bar{b}, \zeta_n, \bar{\zeta}_m, c_n, \bar{c}_m \}$ を、散乱データと呼ぶ。又、(1) 式より、次の関係があることがわかる。

$$a(\xi)\,\bar{a}(\xi) + b(\xi)\,\bar{b}(\xi) = 1 \qquad \text{for real } \xi \qquad (12)$$

逆散乱問題によれば，S から Potential q, r をきめることは一意的である。[1)]

§2. 保存量と散乱データの関係

Potential q, r をここでは特に，

$$(\partial_x^n q)\cdot(\partial_x^m r) \longrightarrow 0 \quad (\text{急減少}) \qquad \text{as } x \to \infty$$

$$n, m = 0, 1, 2, \cdots$$

とする。このとき $\xi \to$ 大 で次のような (1) 式の漸近解を考えることができる。

$$f_1(x,\xi) = \exp\left\{-i\xi x + \int_{-\infty}^{x} \Phi_1(s,t,\xi)\,ds\right\} \quad (13)$$

$$\longrightarrow a(\xi)\,e^{-i\xi x} \qquad \text{as} \quad x \to \infty$$

すなわち，

$$\ln a(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(s,t,\xi)\,ds \qquad (14)$$

同様に，

$$\overline{f_2}(x,\xi) = -\exp\left\{i\xi x + \int_{-\infty}^{x} \Phi_2(s,t,\xi)\,ds\right\} \quad (15)$$

$$\longrightarrow -\overline{a}(\xi)\,e^{i\xi x} \qquad \text{as} \quad x \to \infty$$

$$\therefore \quad \ln \overline{a}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(s,t,\xi)\,ds \qquad (16)$$

一方，(2) 式より Φ_1，Φ_2 について，次式を得る

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_1+\frac{\partial}{\partial x}\left(-A-\frac{B}{q}\Phi_1\right)=0 \qquad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_2+\frac{\partial}{\partial x}\left(A-\frac{C}{r}\Phi_2\right)=0 \qquad (18)$$

よって、(17)、(18)式の第2項目の積分が零であるならば、(14)、(15)は保存量であることがわかる。　(13)式を(1)式に代入して、Potentialの項で保存量を表わすと、

$$\Phi_1(x,t,\xi)=\frac{1}{2i\xi}\left\{\Phi_1^2+q\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{q}\Phi_1\right)-qr\right\} \qquad (19)$$

これより、Φ_1 を ξ の逆巾で展開して

$$\Phi_1(x,t,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_1^{(n)}(x,t)}{(2i\xi)^n} \qquad (20)$$

次の recursion formula を得る。

$$\phi_1^{(k+1)}=q\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{q}\phi_1^{(k)}\right)+\sum_{l=1}^{k-1}\phi_1^{(l)}\phi_1^{(k-l)} \qquad (21)$$

このとき保存量は、例えば、

$$I_1^{(1)}=-\int qr\,dx,\quad I_1^{(2)}=-\int rq_x\,dx \qquad (22)$$

$$I_1^{(3)}=\int(q^2r^2-qr_{xx})\,dx,\quad I_1^{(4)}=\int(3q^2rr_x-qr_{xxx})\,dx$$

$$\cdots\cdots\quad I_1^{(k)}=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_1^{(k)}(x,t)\,dx \qquad (23)$$

Φ_2 に関して同様に計算すると $I_1^{(k)}=I_2^{(k)}$ であることが

ただちにわかる。又，(22)の積分が存在することは明らか。

§3 Hamiltonian System としての非線形方程式

次のような Hamiltonian System を定義する。

$$q_t = \{q, H\} \quad , \quad r_t = \{r, H\} \tag{24}$$

H は，前節で求めた保存量 I によって表わされる。又，$\{\ ,\ \}$ は Poisson bracket を表わし，次のように定義される。

$$\{u, v\} = i\int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{\delta u}{\delta q}\cdot\frac{\delta v}{\delta r} - \frac{\delta u}{\delta r}\cdot\frac{\delta v}{\delta q} \right) + \left(\frac{\delta u}{\delta r^*}\cdot\frac{\delta v}{\delta q^*} - \frac{\delta u}{\delta q^*}\cdot\frac{\delta v}{\delta r^*} \right) \right] \tag{25}$$

ここで $\delta/\delta q$ は，Fréchet 微分を表わす。このとき，

$$\begin{aligned} &\{q(x), r(x')\} = i\delta(x-x') \\ &\{q(x), q(x')\} = \{r(x), r(x')\} = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

を満足し，q，r が canonical set をなすことがわかる。

次に (24) を正準変換するが，その前に，(24) の形で与えられる非線形発展方程式のクラスを考えよう。

Class 1 ;　$H = -(I^{(3)} + I^{(3)*})$　(27)

とすると，(24) 式は

$$iq_t = 2rq^2 - q_{xx} \quad , \quad ir_t = -2qr^2 + r_{xx}$$

特に、$r = -q^*$ とおくと、

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = 0 \qquad (28)$$

なる非線形 Schrödinger 方程式をうる。

Class 2： $H = i(I_1^{(4)} - I_1^{(4)*})$ (29)

とすると、

$$q_t = 6rqq_x - q_{xxx} \quad , \quad r_t = 6qrr_x - r_{xxx}$$

i) $r = i, q = iu$ とおくと、

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad (30)$$

なる Korteweg-de Vries 方程式をうる。

ii) $r = q = iv$ とおくと、

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \qquad (31)$$

なる変形 Korteweg-de Vries 方程式をうる。

一般に、

$$H = \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n I^{(n)} + c.c) \qquad (32)$$

が考えられ、generalized KdV 方程式等が含まれていることが容易にわかる。

§4. 正準変換

散乱問題に拠れば、potential q, r と散乱データ S の間には一対一の関係がある。そこで今、q, r system

から、散乱データの項への正準変換を考える。 ここで、Fréchet derivative を、一般性を失うことなしに、次のように定義する。

$$\frac{\delta f(x,\xi)}{\delta q(x)} \equiv \lim_{s\uparrow x} \frac{\delta f(x,\xi)}{\delta q(s)} \qquad (33)$$

この定義より、(9)式から a, b の q, r についての Fréchet 微分は、Jost 函数を用いて、(real ξ について)

$$\frac{\delta a(\xi)}{\delta q(x)} = f_2 g_2(x,\xi), \quad \frac{\delta a(\xi)}{\delta r(x)} = -f_1 g_1(x,\xi) \quad (34)$$

$$\frac{\delta b(\xi)}{\delta q(x)} = -f_2 \bar{g}_2(x,\xi), \quad \frac{\delta b(\xi)}{\delta r(x)} = f_1 \bar{g}_1(x,\xi) \quad (35)$$

となる。 Poisson bracket $\{a(\xi), b(\xi')\}$ は (25) より

$$\{a(\xi), b(\xi')\} = i\int dx\left(f_2 g_2(x,\xi) f_1 \bar{g}_1(x,\xi') - f_1 g_1(x,\xi) f_2 \bar{g}_2(x,\xi')\right)$$

となる。 一方 (1)式より、 $\xi=\xi_1$ のとき $u^{(1)}, u^{(2)}$, $\xi=\xi_2$ のとき、$v^{(1)}, v^{(2)}$ を任意の解の pair とするとき

$$u_1^{(1)} u_1^{(2)} v_2^{(1)} v_2^{(2)} - u_2^{(1)} u_2^{(2)} v_1^{(1)} v_1^{(2)}$$
$$= \rho \frac{i}{2(\xi_1-\xi_2)} \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(u_1^{(1)} v_2^{(1)} - u_2^{(1)} v_1^{(1)}\right)\left(u_1^{(2)} v_2^{(2)} - u_2^{(2)} v_1^{(2)}\right)\right] \quad (36)$$

の関係がある。 このように Poisson bracket は、Jost 函数の漸近解のみで与えられる。 (36)を用いれば上式は

$$\{a(\xi), b(\xi')\} = -\mathcal{P}\frac{1}{2(\xi-\xi')}a(\xi)b(\xi') + \mathcal{P}\frac{1}{2(\xi-\xi')}\lim_{x\to\infty} e^{2i(\xi-\xi')x} a(\xi')b(\xi)$$

ここで symbol $\mathcal{P}$ は 主値を表わす。 又.

$$\mathcal{P}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{e^{i\xi x}}{\xi}\right) = i\pi\delta(\xi)$$

なる. 超函数 をつかって.

$$\{\ln a(\xi), \ln b(\xi')\} = \mathcal{P}\left(-\frac{1}{2(\xi-\xi')}\right) + \frac{i\pi}{2}\delta(\xi-\xi') \tag{37}$$

を得る。 同様にして.

$$\{\ln \overline{a}(\xi), \ln b(\xi')\} = \mathcal{P}\frac{1}{2(\xi-\xi')} + \frac{i\pi}{2}\delta(\xi-\xi')$$

$$\{\ln a(\xi), \ln \overline{b}(\xi')\} = \mathcal{P}\frac{1}{2(\xi-\xi')} - \frac{i\pi}{2}\delta(\xi-\xi')$$

$$\{\ln \overline{a}(\xi), \ln \overline{b}(\xi')\} = \mathcal{P}\left(-\frac{1}{2(\xi-\xi')}\right) - \frac{i\pi}{2}\delta(\xi-\xi')$$

$$\{a(\xi), \overline{a}(\xi')\} = \{b(\xi), \overline{b}(\xi')\} = 0$$

を得る。 これらより.

$$P_\xi = \ln|a(\xi)|^{-2} \quad \text{or} \quad \overline{P}_\xi = \ln|\overline{a}(\xi)|^{-2} \tag{38}$$

$$Q_\xi = \frac{2}{\pi}\arg b(\xi) \quad \text{or} \quad \overline{Q}_\xi = -\frac{2}{\pi}\arg \overline{b}(\xi)$$

が canonical set をなすことが容易にわかる。すなわち、

$$
\begin{aligned}
\{P_\xi, Q_{\xi'}\} &= \{\overline{P}_\xi, \overline{Q}_{\xi'}\} = -\delta(\xi-\xi') \\
\{P_\xi, \overline{P}_{\xi'}\} &= \{Q_\xi, \overline{Q}_{\xi'}\} = 0
\end{aligned}
\tag{39}
$$

ここで、 P は integral になっていることに注意せよ。

bound state , $a(\zeta_n)=0$, についても 同様に計算できる。 特に $\delta\zeta_n/\delta q(x)$ には、摂動法を用いる。

$$
\left(
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + i(\zeta+\delta\zeta)\varphi_1 = \left(q + \delta q\,\delta(x-z)\right)\varphi_2 \\
&\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - i(\zeta+\delta\zeta)\varphi_2 = r\varphi_1
\end{aligned}
\right.
$$

なる、 $q \to q+\delta q$ の摂動を受けた方程式を考え、波動函数 φ の連続性と、有界性をつかって、次式をうる。

$$
\frac{\delta\zeta_n}{\delta q(x)} = -\frac{1}{\dot{a}(\zeta_n)} f_2 g_2(x,\zeta_n) \tag{40}
$$

同様に、r について、

$$
\frac{\delta\zeta_n}{\delta r(x)} = \frac{1}{\dot{a}(\zeta_n)} f_1 g_1(x,\zeta_n) \tag{41}
$$

ここで $\dot{a}$ は ζ についての微分を意味する。 又、

$$
\frac{\delta c_n}{\delta q(x)} = -f_2\overline{g}_2(x,\zeta_n) \quad , \quad \frac{\delta c_n}{\delta r(x)} = f_1\overline{g}_1(x,\zeta_n)
$$

は、明らか。 これより Poisson bracket を計算して、(36)式 をつかうことで、次式を得る。

$$\{\xi_n, c_{n'}\} = 0 \qquad (n \neq n')$$

$$\{\xi_n, \xi_{n'}\} = \{c_n, c_{n'}\} = 0$$

$$\{\xi_n, c_n\} = \frac{1}{2} c_n$$

これらより、

$$P_n = \xi_n, \qquad Q_n = -2 \ln c_n \qquad (42)$$

が canonical set であることが容易にわかる。一方、$a(\xi_n)=0$ を考慮することで連続部分 ξ についての canonical set と、(42) とが commutative であることが示せる。又、$\bar{a}(\bar{\xi}_m)=0$ の部分についても全く同様の結果を得る。

$$\bar{P}_m = \bar{\xi}_m, \qquad \bar{Q}_m = -2 \ln \bar{c}_m \qquad (42)'$$

更に、このような canonical set (38), (42) は散乱データ S^r に同値であることが証明できる。このようにして、散乱問題は g, r から P, Q への正準変換であると見ることができる。そして、正準変換は逆をもつことから、逆散乱問題も又、正準変換である。

§5 Canonical 変数による Hamiltonian の表現

(14) 式において、$a(\xi)$ は $|\xi| \to \infty$ で次のような漸近形をもつことがわかる。

$$a(\xi) \longrightarrow 1 \qquad \text{as} \qquad |\xi| \longrightarrow \infty$$

よって 次の展開が可能である。

$$\ln a(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\xi^k} \qquad \mathrm{Im}\,\xi \geq 0 \qquad (44)$$

(22) 式と比較して、次式を得る。

$$I_k = (2i)^k C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint \ln a(\xi) \cdot \xi^{k-1} d\xi \qquad (45)$$

積分路は、上半平面にわたってとる。 $a(\xi)$ については、bound state 及び、漸近形を考慮して次式で表わせる。

$$a(\xi) = \hat{a}(\xi) \prod_{n=1}^{N_1} \frac{\xi - \xi_n}{\xi - \xi_n^*} \qquad \hat{a}(\xi):\ \text{reduced function of } a(\xi)$$

$\hat{a}(\xi)$ は、上半平面で零点をもたない、$a(\xi)$ と同じ解析性をもつ函数である。 これをつかって (45) 式を計算すると

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \alpha_k I_1^{(k)} + c.c \\
&= -\alpha_k \frac{(2i)^k}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |a(\xi)|^2 \cdot \xi^{k-1} d\xi \\
&\quad + \alpha_k \frac{(2i)^k}{2\pi i} \sum_{n=1}^{N_1} \oint \ln \frac{\xi - \xi_n}{\xi - \xi_n^*} \cdot \xi^{n-1} d\xi
\end{aligned}
$$

ここで、α_k は、k が偶数のとき純虚数、奇数で実数となるように選ぶ。 よって、P.Q で表わせば

$$H_1[P,Q] = \alpha_k (2i)^k \left[\frac{1}{\pi i} \int P_\xi \cdot \xi^{k-1} d\xi - \sum_{n=1}^{N_1} \frac{P_n^{\,k} - P_n^{*k}}{k} \right] \quad (46)$$

同様にして、

$$H_2[\bar{P},\bar{Q}] = \alpha_k (2i)^k \left[\frac{1}{\pi i} \int \bar{P}_\xi \cdot \xi^{k-1} d\xi + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{\bar{P}_m^{\,k} - \bar{P}_m^{*k}}{k} \right] \quad (47)$$

を得る。このように、P, Q 変数は action angle 型のものである。P, Q の t に関する action は次の Hamiltonian flow によって記述される。

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta Q}, \qquad \frac{dQ}{dt} = \frac{\delta H}{\delta P} \quad (48)$$

これより、この system が

$$p = \text{const.} \quad (\text{action variable}) \quad (49)$$

であり、完全積分可能であることが分かる。特に、固有値 ζ_n は (48) ((24)) の Hamiltonian flow で不変である。

前にあげた、幾つかの例について具体的に、P, Q の action を求めてみると、

Class 1　　$H = -(I^{(3)} + I^{(3)*})$, $(\alpha_k = -1,\ k=3)$

非線形 Schrödinger 方程式

$\zeta_n = \bar{\zeta}_n^*$: time invariant.

$b(t,\xi) = \bar{b}^*(t,\xi) = b(0,\xi) \exp(4i\xi^2 t)$

$C_n(t) = \bar{C}_n^*(t) = C_n(0) \exp(4i\zeta_n^2 t)$

Class 2 : $H = i\,(I^{(4)} - I^{(4)*})$ $(\alpha_k = i\,,\ k = 4)$

i) K-dV 方程式

$\zeta_n = i\,\kappa_n$: time invariant $\kappa_n > 0$ real.

$b(t,\xi) = -\bar{b}^*(t,\xi) = b(0,\xi)\exp(8i\xi^3 t)$

$C_n(t) = -\bar{C}_n^*(t) = C_n(0)\exp(8\kappa_n^3 t)$

ii) M-KdV 方程式

$\zeta_n = \bar{\zeta}_n^*$: time invariant

$b(t,\xi) = \bar{b}^*(t,\xi) = b(0,\xi)\exp(8i\xi^3 t)$

$C_n(t) = \bar{C}_n^*(t) = C_n(0)\exp(8i\zeta_n^3 t)$

これらは，よく知られた結果である。

References

1) M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur: Phys. Rev. Lett., 31 (1973) 125

2) V. E. Zakharov and L. D. Faddeev ; Funct. Anal. Appl., 5 (1971) 280

3) V. E. Zakharov and C. V. Manakov ; Teoret. Matem. Fiz., 19 (1974) 332

（ここでの結果は．Prog. Theor. Phys. Vol 54 No.3 に掲載予定）