数理解析研究所講究録
第256巻 1975年 40-51

C_ρ classの作用素に関連した定数

北大 応電研　大久保和義

§1. 序

$\mathcal{H}$をヒルベルト空間として、作用素とは$\mathcal{H}$上の有界線形作用素のことを意味するものとする。

Sz.-NagyとFoias[8]は、任意の$\rho>0$に対して、有界線形作用素全体からなる空間の部分集合C_ρを、TがC_ρの元であるとは、$\mathcal{H}\subset\mathcal{K}$なるヒルベルト空間$\mathcal{K}$と$\mathcal{K}$上のユニタリー作用素U（Tのユニタリー$\rho$-dilationとよばれる）が存在して

$$(T^n h, g) = \rho\,(U^n h, g) \quad (h, g\in\mathcal{H},\ n=1,2,\cdots)$$

をみたすことであると定義して、その一般的な性質を調べてきた。ここではTがC_ρの元となっているときに、Tをρ-contractionとよぶ。

一方1968年にHolbrook[4]は、C_ρが$\mathcal{H}$上の有界線形作用素全体からなる空間において、閉かつ円形部分集合

となっているので，作用素Tに対して，それに対応する Minkowski汎函数 $w_\rho(T)$，即ち

$$w_\rho(T) = \inf\{\gamma > 0 \mid \gamma^{-1}T \in C_\rho\}$$

を定義して（Tの ρ-radius とよぶ），助変数 ρ とのかかわり方について研究をはじめ，いろいろな結果も出している。

§2. ρ-contraction の分解

C_ρ族の作用素のある形での分解は $\rho = 2$ のときに Ando〔1〕，一般の ρ のときは Durszt〔3〕によりなされた。これらのことより次のことがいわれる。

補題1．Tが ρ-contraction であるための必要且十分条件は正値 contraction A と contraction W が存在して

(1) $$T = \rho\{1 + \rho(\rho-2)A\}^{-\frac{1}{2}}(1-A)^{\frac{1}{2}}WA^{\frac{1}{2}}$$

と分解できることである。又この分解に現われる $\langle A, W\rangle$ の集合の中には次の性質をもつ $\langle A_u, W_u\rangle$ がある。即ち任意の $\langle A, W\rangle$ に対して $A_u \leq A$，で且．

$$\|W_u A_u^{\frac{1}{2}} h\|^2 = (A_u h, h) \quad (h \in \mathcal{H})$$

証明．正値 contraction Aに対して，Tが(1)の表示をもつことと．不等式

(2)．$$\|A^{\frac{1}{2}} h\|^2 \geq \rho^{-2}\|\{1+\rho(\rho-2)A\}^{\frac{1}{2}}(1-A)^{-\frac{1}{2}}Th\|^2$$

が成立することと同値である。さらに(2)は次の不等式

(3) $\|A^{\frac{1}{2}}h\|^2+(1-2\rho^{-1})\|Th\|^2 \geq \sup_{g\in\mathcal{H}} \dfrac{(1-1/\rho)^2|(g,Th)|^2}{\|g\|^2-\|A^{\frac{1}{2}}g\|^2}$

が成立することと同値である。ここで等号は

$$\|WA^{\frac{1}{2}}h\| = \|A^{\frac{1}{2}}h\| \quad (h\in\mathcal{H})$$

のときだけに成立することに注意する。

Tが(1)の表示をもっているとすると(2)より

(4) $2|(1-\rho^{-1})(Th,h)| \leq \|h\|^2+(1-2\rho^{-1})\|Th\|^2$

がでて又(1)はT, WをξT, ξW $(|\xi|<1)$でおきかえても成立するから(4)より

(5) $\|h\|^2+(1-2\rho^{-1})|\xi|^2\|Th\|^2-2(1-\rho^{-1})\mathrm{Re}(\xi Th,h) \geq 0$

となり．これはSz.-Nagy-Foias [8]よりTはρ-contraction となることを示している。

逆にTをρ-contractionとして，Uを$\mathcal{K}$上のユニタリーρ-dilationとする。G_nを$\bigvee_{k=0}^{n} U^{*k}(\mathcal{H})$なる$\mathcal{K}$の部分空間として，又$Q_n$を$\bigvee_{k=0}^{n} U^{*k}(\mathcal{H})$上への直交射影とする。このとき$\rho$-dilationの定義より$(U-T)(\mathcal{H})$は$U^*(G_n)$と直交して，さらに$U^*(G_n) \leq G_{n+1}$より

$$Q_n U Q_{n+1}(U-T)(\mathcal{H}) = \{0\} \text{ となる。}$$

又明らかに

$$U Q_{n+1}(U-T)(\mathcal{H}) \subset U(\mathcal{H}) \vee G_n$$

だから，ベクトル $(I-Q_n)UQ_{n+1}(U-T)h$ は

$(I-Q_n)U(\mathcal{H})$ の閉包に属するから

$$\inf_{g\in\mathcal{H}} \|(I-Q_n)U[g-Q_{n+1}(U-T)h]\|^2 = 0$$

ここで g を λg におきかえて $\inf$ をとると

(6) $\|Q_{n+1}Uh\|^2+(1-2\rho^{-1})\|Th\|^2 = \sup_{g\in\mathcal{H}} \dfrac{(1-\rho^{-1})^2|(g,Th)|^2}{\|g\|^2-\|Q_nUg\|^2}$

が成立する。これは ρ-dilation の定義から Q_{n+1}，Q_n をそれぞれ，Q_0，0 でおきかえても成立する。

U^*Q_nU が $Q^{(-)}$（$Q^{(-)}$ は $\bigvee_{n=1}^{\infty} U^{*n}(\mathcal{H})$ 上への直交射影）に強収束するから，(6) より

$$\|Q^{(-)}h\|^2+(1-2\rho^{-1})\|Th\|^2 = \sup_{g\in\mathcal{H}} \frac{(1-\rho^{-1})|(g,Th)|^2}{\|g\|^2-\|Q^{(-)}g\|^2}$$

が成立する。

P を $\mathcal{H}$ 上への直交射影として，$A_u=PQ^{(-)}P$ とすると A_u は (1) での T の表示の要求をみたしていて，最初の注意より対応する W_u は等長である。A_u の最小性は $\langle A, W\rangle$ が (1) をみたす，即ち (3) をみたすとするとき，$A_n=PQ_nP$ として $A_{-1}=0$ とすると (6) より

(7) $(A_nh,h)+(1-2\rho^{-1})\|Th\|^2 = \sup_{g\in\mathcal{H}} \dfrac{(1-\rho^{-1})|(g,Th)|^2}{\|g\|^2-(A_{n-1}g,g)}$

がでて，あとは帰納法と (3)，(7) を用いる。

§3. ρ-contraction に関するある定数

ρ-contraction は contraction と似かよった性質をもって

いる。実際，Sz.-Nagy-Foias [9] は ρ-contraction が contraction と相似なことを示し，後に Holbrook [5] は相似性の一般的な定理の系として，このことの簡単な証明を与えた。ここでは補題1を用いて次のことがいえる。

定理2. T を ρ-contraction とすると，有界な逆をもつ作用素 S で
$$\|S^{-1}TS\| \leq 1, \quad \|S\|\cdot\|S^{-1}\| \leq \max(1, \rho)$$
をみたすものがある。常数 $\max(1, \rho)$ は最良である。

証明. $\rho > 1$ とする。補題1より正値 contraction A と contraction W が存在して
$$T = \rho\{1+\rho(\rho-2)A\}^{-\frac{1}{2}}(1-A)^{\frac{1}{2}}WA^{\frac{1}{2}}$$
と表わすことができる。$f(t) = \min(1, \rho^{-1}t^{-\frac{1}{2}})$ に対して $S = f(A)$ を考えると，明らかに
$$\|S\| \leq 1, \quad \|S^{-1}\| \leq \max(1, \rho), \quad \|A^{\frac{1}{2}}S\| \leq \rho^{-1}$$
である。又スペクトル定理と
$$\{1+\rho(\rho-2)t\}^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} \leq \min(1, \rho^{-1}t^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{より}$$
$$\|S^{-1}\{1+\rho(\rho-2)A\}^{-\frac{1}{2}}(1-A)^{\frac{1}{2}}\| \leq 1 \quad \text{となる。}$$
故に $\|S^{-1}TS\| \leq 1$，$\|S^{-1}\|\cdot\|S\| \leq \max(1, \rho)$ がでる。この値が最良なることは T が $T^2 = 0$，$\|T\| = \rho$ をみたしていると $T \in C_\rho$ なることがわかっているから，このような T

をとることにより　$\rho = \|T\| \leqq \|S\| \cdot \|S^{-1}\|$ となる。

一方 T が ρ-contraction とするとき，Eckstein によって $\{\|T^n h\|\}$ の収束が証明され，さらに Mlak が $P^{(-)}$ を $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k=n}^{\infty} U^{*k}(\mathcal{H})$ 上への直交射影とするとき

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n h\|^2 = \rho \|P^{(-)} h\|^2 \tag{8}$$

が成立することを示した。ここでは次のことを証明する。

> 定理 3.　T を ρ-contraction とするとき
>
> $$\lim_{n\to\infty} \{\|T^n h\|^2 + \|T^{*n} h\|^2\} \leqq \max(2, \rho)\|h\|^2$$
>
> である。さらに $0 < \rho < 1$ では左辺は常に 0，$1 \leqq \rho < \infty$ では常数 $\max(2, \rho)$ は最良である。

証明．U を T のユニタリー ρ-dilation とすると U^* は T^* のユニタリー ρ-dilation となる。

$A_M = PQ^{(+)}P$　（$Q^{(+)}$ は $\bigvee_{n=1}^{\infty} U^n(\mathcal{H})$ への直交射影とする）

とすると補題 1 より contraction V が存在して

$$T^* = \rho\{1 + \rho(\rho-2)A_M\}^{-1}(1-A_M)^{\frac{1}{2}} V A_M^{\frac{1}{2}}$$ となる。今 $B = \{1 + \rho(\rho-2)A_M\}^{-1}(1-A_M)$ とすると

$A_M = \{1 + \rho(\rho-2)B\}^{-1}(1-B)$ となる。故に T は

$$T = \rho\{1 + \rho(\rho-2)B\}^{-\frac{1}{2}}(1-B)^{\frac{1}{2}} V^* B^{\frac{1}{2}}$$ と表わすことができて，再び補題 1 を用いると

(9) $A_n \leqq \{1+\rho(\rho-2)A_M\}^{-1}(1-A_M)$ となる。

Mlakの式 (8) より

$$\lim_{n\to\infty}\{\|T^n h\|^2+\|T^{*n}h\|^2\}=\rho(\,(P^{(-)}+P^{(+)})h,h)$$

(ただし $P^{(+)}$ は $\bigwedge_{n=1}^{\infty}\bigvee_{k=n}^{\infty}U^k(\mathcal{H})$ 上への直交射影) となる。

さらに (9) より

$$\lim_{n\to\infty}\{\|T^n h\|^2+\|T^{*n}h\|^2\}$$
$$\leqq\rho(\,[\{1+\rho(\rho-2)A_M\}^{-1}(1-A_M)+A_M]h,h)$$ で

$$\{1+\rho(\rho-2)A_M\}^{-1}(1-A_M)+A_M\leqq\max(2\rho^{-1},1)$$

より定理はいえる。又 $\max(2,\rho)$ が最良なることは $1\leqq\rho\leqq2$ のときは $T=I$ を考えるとよく、$2<\rho<\infty$ のときは次の定理で $\gamma_1=\gamma_2=\cdots=\rho$ としてでてくる。

定理. 非負数列 $\{\alpha_n\}$ ($\alpha_0=1$) に関して次のことは同値である。

(a) ρ - contraction T と単位ベクトル h が存在して

$$\|T^n h\|=\alpha_n\quad(n=1,2,\cdots)$$ をみたす。

(b) 非負数列 $\{\gamma_n\}$ ($\gamma_0=\rho$) が存在して

$$\min\{1,\rho^2(\rho-2)^{-2}\}\gamma_{n-1}\geqq\gamma_{n-1}\geqq0$$

$$2\alpha_n=\rho\gamma_{n-1}-(\rho-2)\gamma_n$$
$$\pm\{[\rho\gamma_{n-1}-(\rho-2)\gamma_n]^2-4\gamma_n\gamma_{n-1}\}^{\frac{1}{2}}\quad(n=1,2,\cdots)$$

をみたす。

証明: 略

§4. 可換な積に関する ρ-radius

Holbrook と Sz.-Nagy は独立に, S, T が重可換, 即ち, S と T の間に $ST=TS$, $ST^*=T^*S$ が成立するときに $\sigma,\rho>0$ に対して

$$w_{\sigma\rho}(ST)\leqq w_\sigma(S)w_\rho(T)$$

が成立することを示したが, 重可換を単に可換としたときに上のことがいえるか, 特に $\sigma=1$ としたときに

$$w_\rho(ST)\leqq\|S\|\,w_\rho(T)$$

がいえるだろうか という問題があるが, この種の問題に関して次のことがいえる。

定理4. S と T が可換ならば

$$w_\rho(ST)\leqq L_\sigma\,w_\sigma(S)\,w_\rho(T)\quad(0<\sigma,\rho<\infty)$$

が成立する。 ここで常数 L_σ は

$$L_\sigma=\begin{cases}\{\sigma-1+(1+2\sigma-\sigma^2)^{1/2}\}(2-\sigma)^{-1} & (0<\sigma\leqq 1)\\ \{1-\sigma+(1+2\sigma-\sigma^2)^{1/2}\}(2-\sigma)^{-1} & (1<\sigma<2)\\ \sigma & (2\leqq\sigma<\infty)\end{cases}$$

で与えられる。

これを証明するのに次の2つの補題を用意する。

補題5. $1\leqq\rho<\infty$ とするとき $w_\rho(T)\leqq 1$ ならば T^n を

$\mathcal{H}$の元，$1-2\rho^{-1}<\alpha<1$とすると

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{2n}\|T^n h\|^2\leq\rho\,\alpha^2(1-\alpha)^{-1}(2-\rho+\alpha\rho)^{-1}\|h\|^2$

が成立する。

証明．Sz.-Nagy-Foiaş [8] より $w_\rho(T)\leq 1$ ならば $|z|<1$ に対して $(1-zT)^{-1}$ が存在して

(11) $$\mathrm{Re}\,[\rho+2zT(1-zT)^{-1}]\geq 0$$ となる。

(11) のことは，すべての $h\in\mathcal{H}$，$\lambda>0$ に対して

(12) $\|\{\rho-\lambda+2zT(1-zT)^{-1}\}\{(\rho+\lambda)+2zT(1-zT)^{-1}\}^{-1}h\|^2\leq\|h\|^2$

が成立することと同値である。

今 (12) で $z=re^{i\theta}$ として両辺を $[0,2\pi)$ で積分，$\{e^{in\theta}\}$ の直交性を用いて $r\to 1$ とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\rho+\lambda-2)^{2n}(\rho+\lambda)^{-2n}\|T^n h\|^2\leq\rho(\rho-2+\lambda)(4\lambda)^{-1}\|h\|^2$$

となり $\alpha=(\rho+\lambda-2)(\rho+\lambda)^{-1}$ とおきかえて補題5をえる。

補題6．$\rho>1$ とする。h，g を $\mathcal{H}$ の任意の元として

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{-n}(\rho-1)^n|(T^n h,g)|\leq(\rho-1)\|h\|\cdot\|g\|$

が成立するとき $w_\rho(T)\leq 1$ である。

証明．(13) より $r(T)\leq\rho(\rho-1)^{-1}$．よって $|z|<1$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\{\rho^{-1}(\rho-1)zT\}^n$ は一様に $\rho^{-1}(\rho-1)\{1-\rho^{-1}(\rho-1)zT\}^{-1}$ に収束する。さらに (13) より，任意の $h,g\in\mathcal{H}$，任意の $|z|<1$ に対して $|(zT\{\rho-(\rho-1)zT\}^{-1}h,g)|\leq\|h\|\,\|g\|$ となる。

故にこれは(12)で $\lambda=\rho$ としたときの

$\|zT\{\rho-(\rho-1)zT\}^{-1}h\| \leqq \|h\|$ と同値であり，補題6を示すには $\gamma(T)\leqq 1$ を示すと十分である。

仮に $\gamma(T)>1$ として $|\zeta|=\gamma(T)$ なる近似固有値 ζ を考える。$\varepsilon>0$ と $|z|<1$ を $z\zeta=1+\varepsilon$, $\rho-(\rho-1)(1+\varepsilon)>0$ なるようにとる。このとき $|z\zeta|\leqq|\rho-(\rho-1)z\zeta|$ となるから $1+\varepsilon\leqq\rho-(\rho-1)(1+\varepsilon)$. 故に $0<-\rho\varepsilon$ で矛盾.

定理4の証明. $0<\sigma<1$ に対しては

$\sigma w_\sigma(S)=(2-\sigma)w_{2-\sigma}(S)$ が成立する [Ando & Nishio [2]), 又 $\lambda>0$ に対して $w_\sigma(\lambda S)=\lambda w_\sigma(S)$ が成立して, $w_\rho(T)$ についても同様なことがいえるから

$1\leqq\sigma,\rho<\infty$, かつ $w_\rho(T)=w_\sigma(S)=1$ と仮定する。

$\beta\geqq 1$ として $w_\rho(ST)\leqq\beta$ なる十分条件は補題6を用いて，任意の $h,g\in\mathcal{H}$ に対して

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\beta^{-n}\rho^{-n}(\rho-1)^{n}\|T^nh\|^2\|S^{*n}g\|^2 \leqq (\rho-1)\|h\|\,\|g\|$

がいえることである。$w_\rho(T)=w_\sigma(S)=1$ と補題5より γ を

(15) $1-2\rho^{-1}<1-\gamma\rho^{-1}<1$, $1-2\sigma^{-1}<(\rho-1)\{\beta(\rho-\gamma)\}^{-1}<1$

となるようにとると

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-\gamma\rho^{-1})^{2n}\|T^nh\|^2 \leqq (\rho-\gamma)^2\{\gamma(2-\gamma)\}^{-2}\|h\|^2$

(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\beta^{-2n}(\rho-\gamma)^{-2n}(\rho-1)^{2n}\|S^{*n}g\|^2$

$$\leqq \{\beta(\rho-\gamma)-(\rho-1)\}^{-1}\{(2-\sigma)\beta(\rho-\gamma)+\sigma(\rho-1)\}^{-1}\sigma(\rho-1)\|g\|^2$$

が成立する。

Schwarz の不等式と (16), (17) を用いて，$w_\rho(ST) \leqq \beta$ なる十分条件は

(18) $(2-\sigma)(\rho-\gamma)^2\beta^2 - 2(\rho-1)(\rho-\gamma)(1-\sigma)\beta - \sigma(\rho-1)^2$

$\qquad - \gamma^{-1}(2-\gamma)^{-1}\sigma(\rho-\gamma)^2 \geqq 0$ なる γ が (15) をみたすもので存在することである。$1 \leqq \sigma < 2$，$\rho > 1$ とすると (15) は $\gamma = 1$ でみたされて，このとき (18) は

$$(2-\sigma)\beta^2 - 2(1-\sigma)\beta - 2\sigma \geqq 0 \text{ となる。}$$

即ち
$$\beta \geqq \begin{cases} \{1-\sigma+(1+2\sigma-\sigma^2)^{1/2}\}(2-\sigma)^{-1} & (1 \leqq \sigma < 2) \\ 2 & (\sigma = 2) \end{cases}$$

となる。$\sigma > 2$ については $2w_2(S) \leqq \sigma w_\sigma(S)$ より 定理6 は示された。

$\sigma = 1$ のときは，次のことがいえる。

定理7. $\rho > 0$ とする。S と T が可換なときに

$$w_\rho(ST) \leqq K_\rho \|S\|\, w_\rho(T) \text{ が成立する。}$$

ただし K_ρ は次の形で与えられる

$$K_\rho = \begin{cases} \inf\limits_{0<\gamma<\rho}\left[\{\gamma(2-\gamma)\}^{-1} + (\rho-1)^2(2-\rho-\gamma)^{-2}\right]^{1/2} & (0<\rho<1) \\ \inf\limits_{0<\gamma<1}\left[\{\gamma(2-\gamma)\}^{-1} + (\rho-1)^2(\rho-\gamma)^{-2}\right]^{1/2} & (1 \leqq \rho < \infty) \end{cases}$$

証明は定理6と同じような方法をとるので省略する。

References

[1] T. Ando, Structure of operators with numerical radius one, Acta Sci. Math. 34(1973), 11-15.

[2] T. Ando and K. Nishio, Convexity properties of operator radii associated with unitary ρ-dilations, Michigan Math. J. 20(1973), 303-307.

[3] E. Durszt, Factrization of operators in C_ρ classes, Acta Sci. Math. (to appear).

[4] J.A.R. Holbrook, On the power-bounded operators of Sz.-Nagy and Foias, Acta Sci. Math. 29(1968), 299-310.

[5] ________, Operators similar to contraction, Acta Sci. Math. 34(1973), 163-168.

[6] K. Okubo and T. Ando, Operator radii of commuting products, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

[7] ________, Constants related to operators of class C_ρ, Manuscripta Math. (to appear).

[8] B. Sz.-Nagy and C. Foias, On certain classes of power bounded operators in Hilbert space, Acta Sci. Math. 27 (1966), 17-25.

[9] ________, Similitude des opérateurs de classe C_ρ à des contraction, C.R. Acad. Sci. Paris 264(1967), 1063-1065.