数理解析研究所講究録
第256巻 1975年 52-64

Polynomial Bundle について

北大 応電研　安藤 毅

0. まえがき.

自由度 n の系の振動の方程式は

$$A\ddot{x} + Cx = a$$

で与えられる. ここで $x := x(t)$ および a は n 次元 vector で, A と C は正定値行列である. a は外力をあらわす. この一般解を求めるには, 斉次方程式

$$A\ddot{x} + Cx = 0$$

の解が必要となる. これは

$$x(t) := e^{\lambda t} x_0$$

の形の基準振動を求めることに帰され, 従って

$$(\lambda^2 A + C)x_0 = 0$$

という正定値行列の固有値問題となり, λ は純虚数となる.

Duffin [1] はこの系に damping (減衰) 項が加わった

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0$$

の固有値問題, すなわち

$$(\lambda^2 A + \lambda B + C)x = 0$$

の解となる, λ および x の様相を考察した. B が A, C に較らべ小さいときは固有値も虚軸に近くあらわれる.

Duffin が注目したのは逆に B が A, C に較らべ大きく，固有値が全て実数となる場合である。このための充分條件として overdamping 條件が導入された：

$$(Bx, x)^2 > 4(Ax, x)\cdot(Cx, x) \qquad {}^{\forall}x \neq 0.$$

このとき固有値は互に素な二群に分かれ，固有値を決定する Courant - Fisher 型の min-max 公式が確立された.

Krein - Langer [2] は上記の型の固有値問題を Hilbert 空間の中で考察した。ここでは，高階の微分方程式を一階のものに還元する方法で，線形化がなされ，問題を或る indefinite metric に関して self-adjoint な作用素の spectre 理論としてとらえ，Pontjagin - Krein の理論を基礎として

$$AT^2 + BT + C = 0$$

なる（operator）root T の存在，および T の spectre 理論に視点が移った．この quadratic bundle $\lambda^2 A + \lambda B + C$ を一般の polynomial bundle

$$\mathfrak{L}(\lambda) := \lambda^n D_n + \lambda^{n-1} D_{n-1} + \cdots + \lambda D_1 + D_0$$

に移し，その spectrum を局在化して対応する operator root を求める研究は Langer [4, 5, 6], Markus - Mereura [7], Markus - Macaev - Russu [8] 等により推し進められた．この講演ではこれ等の成果を概観する.

1. 線形化. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の有界線形作用素

$$D_0, D_1, \cdots, D_{n-1} \quad \text{および} \quad D_n \equiv 1$$

を係数とする多項式

$$\mathcal{L}(\lambda) := \lambda^n + \lambda^{n-1} D_{n-1} + \cdots + \lambda D_1 + D_0$$

を (polynomial) bundle と呼ぶ. bundle $\mathcal{L}$ の spectrum $\sigma(\mathcal{L})$ とは $\mathcal{L}(\lambda)$ が有界な逆をもたない λ の全体である. bundle $\mathcal{L}$ に $\mathcal{H}$ の n 個の直和

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}$$

(但し $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ の元は縦 vector であらわす)上の線形作用素

$$\mathbf{L} := \begin{pmatrix} -D_{n-1}, & -D_{n-2}, & \cdots, & & -D_0 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を関連させる. このとき

$$\lambda - \mathbf{L} = \mathbf{B}(\lambda) \begin{pmatrix} \mathcal{L}(\lambda) & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \mathbf{C}(\lambda)$$

となる, ここで

$$\mathbf{B}(\lambda) := \begin{pmatrix} -1, & -B_2(\lambda), & \cdots, & -B_n(\lambda) \\ 0 & & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 0 & 1 & & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(\lambda) := \begin{pmatrix} & 0 & & -1 \\ & & \iddots & \lambda \\ & \iddots & \iddots & 0 \\ -1 & \lambda & & \end{pmatrix}$$

$$B_k(\lambda) := \sum_{j=k-1}^{n} \lambda^{j-k+1} D_j \qquad (k = 2, \cdots, n).$$

$B(\lambda)$ および $C(\lambda)$ はどの λ に対しても逆をもつから

$$\sigma(\mathcal{L}) = \sigma(\mathbf{L})$$

となり，また

$$\mathcal{L}(\lambda)x = 0 \iff (\lambda - \mathbf{L})\begin{pmatrix} \lambda^{n-1}x \\ \lambda^{n-2}x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} = 0 .$$

$\mathbf{L}$ の特殊形から $\overset{(k)}{\mathbf{x}}, \overset{(k-1)}{\mathbf{x}}, \cdots, \overset{(0)}{\mathbf{x}}$ が $\lambda - \mathbf{L}$ の Jordan chain，すなわち

$$(\lambda - \mathbf{L})\overset{(j)}{\mathbf{x}} = \overset{(j-1)}{\mathbf{x}} \quad (j = 1, \cdots, k), \qquad (\lambda - \mathbf{L})\overset{(0)}{\mathbf{x}} = 0$$

のとき，$\overset{(k)}{\mathbf{x}}, \cdots, \overset{(0)}{\mathbf{x}}$ はそれ等の才 n 座標 $x_k, \cdots, x_0$ で決定され，この才 n 座標が満すべき条件は

$$\mathcal{L}(\lambda)x_\ell + \frac{1}{1!}\frac{d\mathcal{L}(\lambda)}{d\lambda}x_{(\ell-1)} + \cdots + \frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{d\lambda^\ell}\mathcal{L}(\lambda)x_0 = 0 \quad (\ell = 0, 1, \cdots, k)$$

である．この条件は

$$x(t) := \exp(\lambda t)\sum_{j=0}^{k}\frac{t^j}{j!}x_j$$

が微分方程式

$$\sum_{j=0}^{n} D_j x^{(j)} = 0$$

の解となることである．

$\mathcal{H}$ 上の線形作用素 T が

$$T^n + D_{n-1}T^{n-1} + \cdots + D_1 T + D_0 = 0$$

をみたすとき bundle $\mathcal{L}$ の (operator) <u>root</u> と呼ぶ．このときは $n-1$ 次の bundle

$$\mathcal{L}_T(\lambda) := \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\lambda^{j-k}D_{n-k+1}T^{n-j}$$

を使って

$$\mathcal{L}(\lambda) = \mathcal{L}_T(\lambda)(\lambda - T)$$

と因数分解できる. また $\mathcal{H}$ の部分空間

$$\mathcal{H}_T := \left\{ \begin{pmatrix} T^{n-1}x \\ T^{n-2}x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} ; x \in \mathcal{H} \right\}$$

は $\mathbf{L}$-invariant となる. 逆に $\mathbf{L}$-invariant な部分空間 $\mathcal{M}$ が, Qx で x の第 n 番目の座標を対応させるとき,

$$\ker(Q|_{\mathcal{M}}) = \{0\} \quad , \quad ran(Q|_{\mathcal{M}}) = \mathcal{H}$$

をみたせば, root T が一意的に定まり $\mathcal{M} = \mathcal{H}_T$ となる.

σ が $\sigma(\mathcal{L})$ の閉部分集合で, root T が

$$\sigma(T) = \sigma$$

をみたすときは, σ に対応する <u>spectral root</u> と呼ぶ. σ と共に $\sigma(\mathcal{L}) \setminus \sigma$ も閉集合のときは, σ に対応する ($\mathbf{L}$ の) <u>spectral projection</u> $\mathbf{P}_\sigma$ が

$$\mathbf{P}_\sigma := \frac{1}{2\pi i} \oint_\sigma (\lambda - \mathbf{L})^{-1} d\lambda$$

で定められる. $ran(\mathbf{P}_\sigma)$ を σ に対応する <u>spectral subspace</u> と呼ぶ. 明らかに $\sigma(\mathbf{L}|_{ran(\mathbf{P}_\sigma)}) = \sigma$.

<u>Proposition 1</u>. (cf. [7]) σ および $\sigma(\mathcal{L}) \setminus \sigma$ は閉集合とする. T が $\mathcal{L}$ の root で $\sigma(T) \subseteq \sigma$ ならば $\mathcal{H}_T \subseteq ran(\mathbf{P}_\sigma)$. もし更に, $\sigma(\mathcal{L}_T) \subseteq \sigma(\mathcal{L}) \setminus \sigma$ が満されていれば $\mathcal{H}_T = ran(\mathbf{P}_\sigma)$ となる.

3. 単調区間. D_j $(j = 0, 1, \cdots, n-1)$ は selfadjoint とすると, $\mathcal{H}$ には selfadjoint operator

$$G := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & D_{n-1} \\ 0 & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ 1 & D_{n-1} & \cdots & D_1 \end{pmatrix}$$

で indefinite scalar product

$$[x, y] := (Gx, y)$$

が導入され, L は G-selfadjoint となる, すなわち

$$[Lx, y] = [x, Ly].$$

$\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathcal{M}$ が G-positive とは $[x, x] \geqq 0$ ${}^\forall x \in \mathcal{M}$ のときとする, 更に ${}^\exists \gamma > 0$ に対し

$$[x, x] \geqq \gamma \|x\|^2 \qquad {}^\forall x \in \mathcal{M}$$

のときは uniformly G-positive という. G-negative 等も同様に定義される.

Theorem 2. (cf. [4]). $-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$ とする.

$$\mathcal{L}(\lambda_2) \gg 0 \gg \mathcal{L}(\lambda_1)$$

$$\mathcal{L}'(\lambda) := \frac{d}{d\lambda}\mathcal{L}(\lambda) \gg 0 \qquad {}^\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$$

ならば $\sigma(\mathcal{L}) \cap [\lambda_1, \lambda_2]$ に対応する spectral root が存在し, それは selfadjoint 作用素と相似である.

(略証) $\lambda_1 < \alpha < \lambda_2$ を固定し, $0 \leqq t \leqq 1$ を parameter として bundle $\mathcal{L}_t$ と対応する L_t を考える:

$$\mathcal{L}_t(\lambda) := \mathcal{L}(\lambda) + (t-1)\mathcal{L}(\alpha).$$

$\mathcal{L}_t$ は $\mathcal{L}$ と同じ仮定をみたす. $\varepsilon>0$ が充分小さいとき

$$\mathcal{L}_t(\lambda\pm i\varepsilon) = \mathcal{L}_t(\lambda) \pm i\varepsilon\mathcal{L}_t'(\lambda) + O(\varepsilon^2) \qquad {}^\forall\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$$

で $\mathcal{L}_t(\lambda)$ は self-adjoint, $\mathcal{L}_t'(\lambda)\gg 0$ より $\mathcal{L}_t(\lambda\pm i\varepsilon)$ は逆がある. 従って $\tilde{\sigma}_t := \sigma(\mathcal{L}_t)\cap[\lambda_1,\lambda_2]$ と $\sigma(\mathcal{L}_t)\setminus\tilde{\sigma}_t$ は共に閉集合になる. $\tilde{\sigma}_t$ に対応する ($\mathbf{L}_t$ に関係した) spectral projection を $\mathbf{P}_t$ とかこう。 $\mathbf{L}_t$ と共に $\mathbf{P}_t$ も G-selfadjoint になり, $t\longmapsto \mathbf{P}_t$ は norm 連続である.

明らかに $\mathcal{L}_0(\alpha)=0$ で $\mathrm{ran}(\mathbf{P}_0) = \mathcal{H}_\alpha$ となる.

$$\left[\begin{pmatrix}\alpha^{n-1}x\\ \alpha^{n-2}x\\ \vdots\\ x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha^{n-1}x\\ \alpha^{n-2}x\\ \vdots\\ x\end{pmatrix}\right] = (\mathcal{L}'(\alpha)x, x)$$

より $\mathcal{H}_\alpha$ は uniformly G-positive になる。この関係を連続的に接続して $\mathrm{ran}(\mathbf{P}_t)$ $0\leq t\leq 1$ も uniformly positive となる. これから, $\mathbf{P}_t$ を表示する operator matrix の第1列を $\begin{pmatrix}P_1(t)\\ \vdots\\ P_n(t)\end{pmatrix}$ とすると, $P_n(t)\gg 0$.

$\sigma(\mathbf{L}_t\,|\,\mathrm{ran}(\mathbf{P}_t))\subseteq[\lambda_1,\lambda_2]$ と $\mathbf{L}_t$ の G-self-adjointより

$$\lambda_1^{n-1}P_n(t) \leq P_j(t) \leq \lambda_2^{n-j}P_n(t) \qquad (\text{但し } 0<\lambda_1 \text{ とする})$$

一方 $\mathrm{ran}(P_n(0)) = \mathcal{H}$ は明らかであるから, 充分 0 に近い t に対しては $\mathrm{ran}(P_n(t)) = \mathcal{H}$ となり, 上より

$$\mathrm{ran}(\mathbf{P}_t) = \mathcal{H}_{T_t} \qquad \text{但} \quad T_t := P_{n-1}(t)\cdot P_n(t)^{-1}$$

となり, T_t は spectral root になる. $t\longmapsto T_t$ の対応は analytic であるから, $\mathcal{L}_t(T_t)=0$ なる関係は $0\leq t\leq 1$ 全体で成り立つ. (終)

4. <u>hyperbolicity</u> D_j $(j=0,1,\cdots,n-1)$ は selfadjoint とする. どの $0 \neq x \in \mathcal{H}$ に対しても n 次多項式

$$p_x(\lambda) := (\mathcal{L}(\lambda)x, x)$$

が n 個の実根をもつとき, bundle $\mathcal{L}$ は <u>hyperbolic</u> と呼ばれる. このとき $p_x(\lambda)$ の根を並べ

$$\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(x)$$

$$\Lambda_k := \{\lambda_k(x)\,;\ 0 \neq x \in \mathcal{H}\} \qquad k=1,2,\cdots,n$$

とする. Λ_k は bundle $\mathcal{L}$ の k 番目の <u>spectral zone</u> と呼ばれる.

<u>Proposition</u> 3. (cf. [6], [8]). hyperbolic bundle $\mathcal{L}$ の各 spectral zone Λ_k は区間であり, $\Lambda_k \cap \Lambda_{k+1}$ は高々 1点からなり, $\sigma(\mathcal{L}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \overline{\Lambda_k}$.

bundle $\mathcal{L}$ が hyperbolic のとき γ_k $(k=1,\cdots,n-1)$ を

$$\sup \Lambda_{k+1} \leqslant \gamma_k \leqslant \inf \Lambda_k$$

にとり, $n-1$ 次多項式

$$\varphi(\lambda) := \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda - \gamma_k)$$

を考えると, $\varphi(\mathbf{L})$ は $\mathbf{G}$ - positive となる, すなわち

$$[\varphi(\mathbf{L})x, x] \geqslant 0 \qquad {}^{\forall} x \in \mathcal{H}.$$

逆に, ある $n-1$ 次多項式

$$\psi(\lambda) := \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda - \rho_k) \qquad -\infty < \rho_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant \rho_1 < \infty$$

に対して $\varphi(\mathbf{L})$ が $\mathbf{G}$ - positive となるならば.

$$(-1)^k (\mathcal{L}(\rho_k)x, x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}, \quad k=1,2,\dots,n-1$$

となり，$\mathcal{L}$ は hyperbolic である．

与えられた bundle が hyperbolic になる充分条件としては：$D_j \geq 0 \quad (j=0,1,\dots,n-1)$

$$(D_j x, x)^2 \geq 4(D_{j-1}x,x)\cdot(D_{j+1}x,x) \quad \forall x\in\mathcal{H} \quad \forall j$$

<u>Theorem 4</u>. (cf. [5], [8]). $\mathcal{L}$ は hyperbolic で，Λ_k をその spectral zone とする．このとき $\overline{\Lambda_k \cap \sigma(\mathcal{L})}$ に対応する spectral root T_k が存在する．$\mathcal{H}_{T_k}$ は k の奇，偶にしたがって G-positive, negative となる．

(略証) $G\cdot\varphi(L)$ に関して $\mathcal{H}$ が pre-Hilbert 空間になり L がそこで selfadjoint であるから，実数 $\lambda \neq \gamma_1,\dots,\gamma_{n-1}$ に対し G-selfadjoint projection E_λ が定まり，閉区間 Δ が $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{n-1}$ を含まないとき

$$[E(\Delta)L^j x, x] = \int_\Delta \frac{\lambda^j}{\varphi(\lambda)}\, d\sigma_x(\lambda) \qquad j=0,1,\dots$$

とかける，ここで $\sigma_x(\cdot)$ は正測度である．これから $\Delta \subset \Lambda_k$ のとき k の奇，偶に従がって $E(\Delta)$ は G-positive, negative となる．

$$\mathfrak{M}_+ := \sum_{\Delta\subset{}^\exists\Lambda_k\,\text{奇}} \mathrm{ran}(E(\Delta)), \qquad \mathfrak{M}_- := \sum_{\Delta\subset{}^\exists\Lambda_k\,\text{偶}} \mathrm{ran}(E(\Delta))$$

とすると，$\mathfrak{M}_+$ は G-positive，$\mathfrak{M}_-$ は G-negative で

$$[\mathfrak{M}_+, \mathfrak{M}_-] = 0$$

となる．Langer [3] の方法で，$\mathfrak{M}_+$，$\mathfrak{M}_-$ はそれぞれ

L-invariant, maximal G-positive $\mathfrak{M}_{(+)}$ および
maximal G-negative $\mathfrak{M}_{(-)}$ に含まれ

$$\mathfrak{M}_{(\mp)} = \{y \in \mathcal{H} ;\ [y, \mathfrak{M}_{(\pm)}] = 0\}$$

となる. 明らかに次が成り立つ

$$\sigma(L|_{\mathfrak{M}_{(+)}}) \subseteq \bigcup_{奇} \overline{\Lambda}_k , \quad \sigma(L|_{\mathfrak{M}_{(-)}}) \subseteq \bigcup_{偶} \overline{\Lambda}_k .$$

$\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots$, は互に素と仮定してもよいから, $L|_{\mathfrak{M}_{(+)}}$ のこれらに対応する spectral subspace を $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_3, \cdots$.
k が奇数のとき, $\mathfrak{M}_k$ は L-invariant, G-positive で $\sigma(L|_{\mathfrak{M}_k}) \subseteq \overline{\Lambda}_k$ となる maximal なものとして特徴づけられる。

$\overline{\Lambda_k \cap \sigma(\mathcal{L})}$ に対応する spectral root の存在を示すには, Qx は x の第 n 座標をあらわすとして, 次が充分:

$$\ker(Q|_{\mathfrak{M}_k}) = \{0\}, \quad \operatorname{ran}(Q|_{\mathfrak{M}_k})^{-} = \mathcal{H} .$$

ここで closure でよいという所に上記の maximality がいる.

(k を奇数として) $\ker(Q|_{\mathfrak{M}_k}) = \{0\}$ の証明.

${}^{\exists} 0 \neq x \in \mathfrak{M}_k$ $Qx = 0$ とする. $\mathfrak{M}_k$ の G-positive, L-invariant より, 正測度 $m(\cdot) \neq 0$ があり

$$[(L - z)^{-1} x, x] = \int_{\overline{\Lambda}_k} \frac{dm(\lambda)}{\lambda - z} \qquad z \in C$$

とかける. $Qx = 0$ と L の特殊形から, $\overline{\Lambda}_k$ の外で analytic な $\mathcal{H}$-valued 函数 $h(z)$ と $n-4$ 次以下の(数値)多項式 $g(z)$ があり

$$[(\mathbf{L}-z)^{-1}x, x] = -(\mathcal{L}(z)h(z), h(z)) + g(z).$$

hyperbolicity より $(\mathcal{L}(\lambda)h(\lambda), h(\lambda))$ は $n-2$ 個の点 $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-2}, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n$ で符号をかける，ここで

$$\gamma_0 := \sup \Lambda_1, \quad \gamma_n := \inf \Lambda_n.$$

したがって

$$(-1)^j \int_{\Lambda_k} \frac{dm(\lambda)}{\lambda-\gamma_j} \leq (-1)^j g(\gamma_j) \qquad j=0,\ldots,k-2,k+1,\ldots,n$$

$n-3$ 回の階差を作り，g の次数 $\leq n-4$ より

$$\int_{\Lambda_k} \frac{dm(\lambda)}{\prod_{\substack{j=0,\ldots,n\\ \neq k-1,k}}(\lambda-\gamma_j)} \leq 0$$

左辺の被積分函数は正値より，これは矛盾する．

（$1<k$ を奇数として） $\operatorname{ran}(Q|\mathfrak{M}_k)^{-} = \mathcal{H}$ の証明.

これが成り立たなければ，$x := \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で $[x, \mathfrak{M}_k] = 0$ のものがある．

$$\mathfrak{N}_k := \{ y \,;\, [y, \mathfrak{M}_k] = 0 \} \qquad \varphi_k(\lambda) := \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda-\gamma_{k-1})(\lambda-\gamma_k)}$$

とすると，$x \in \mathfrak{N}_k$，$\mathfrak{N}_k$ は $\mathbf{L}$-invariant で

$$[\varphi_k(\mathbf{L})y, y] \geq 0 \qquad \forall y \in \mathfrak{N}_k$$

となる。上と同じように正測度 $n(\cdot) \neq 0$ があり

$$[\varphi_k(\mathbf{L})(\mathbf{L}-z)^{-1}x, x] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn(\lambda)}{\lambda - z}.$$

$\mathbf{L}$ と x の特殊な形より

$$[\varphi_k(\mathbf{L})(\mathbf{L}-z)^{-1}x, x] = \varphi_k(z)\,[(\mathbf{L}-z)^{-1}x, x]$$

で，したがって

$$z\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dn(\lambda)}{\lambda-z} = -z\,\varphi_k(z)\,(\mathcal{L}^{-1}(z)x, x)$$

となる. $z = i\eta$, $\eta\uparrow\infty$ とすると, φ_k の次数 $\leqq n-3$ より右辺は 0 に近づく, 一方左辺は $\int_{-\infty}^{\infty} dn(\lambda)$ となる. これは $n(\cdot) \neq 0$ に矛盾する.

$k=1$ のときは $\varphi_1(\lambda) := -\varphi(\lambda)/(\lambda-\tau_1)$ としてやればよい。 また k が偶数のときも同様に出来る. (終)

この定理で証明された, spectral root $T_1, \cdots, T_n$ から

$$\mathbf{W} := \begin{pmatrix} T_1^{n-1} & \cdots & T_n^{n-1} \\ T_1^{n-2} & & T_n^{n-2} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

を作ると, root の性質から

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{W} = \mathbf{W}\cdot\begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & T_2 & \\ 0 & & \ddots\ T_n \end{pmatrix}$$

となり容易に次の同値性が示される (cf. [6], [7])

(i) $\mathcal{H}_{T_k} \cap \mathcal{H}_{T_{k+1}} = \{0\}$ $\quad k = 1, 2, \cdots, n-1$

(ii) $\ker(\mathbf{W}) = \{0\}$

(iii) $\ker(\mathbf{W}^*) = \{0\}$.

文 献

[1] Duffin,R.J., A minimax theory for overdamped networks, J. Rat. Mech. Anal. 4 (1955), 221-233.

[2] Krein, M.G. and Langer, H., Certain mathematical principles of the linear theory of damped vibrations of continua, Proc. of International Conf. : Applications of the theory of functions in continuum mechanics, vol. II 1965 ,283-322, Moskow.

[3] Langer, H., Invariante Teilraume definisierbarer J-selbst-adjungierte Operatoren, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 475 (1971), 1-23.

[4] Langer, H., Uber eine Klasse nichtlinearer Eigenwertprobleme, Acta Sci. Math. 35(1973), 73-86.

[5] Langer, H., Uber eine Klasse polynomialer Scharen selbst-adjungierter Operatoren im Hilbertraum, J. Functional Anal. 12(1973), 13-29.

[6] Langer, H., ... II, J. Functional Anal. 16(1974),221-234.

[7] Markus,A.S. and Mereuca, I.V., On the complete n-tuple of roots of the operator equation corresponding to a polynomial operator bundle, Izv. Akad. Nauk SSSR 37 (1973), 1108-1131.

[8] Markus,A.S. , Macaev,V.I. and Russu,G.I., Some generalization of theory of strongly damped bundles to the case of general order, Acta Sci. Math. 34 (1973), 245-271.