数理解析研究所講究録
第257巻 1975年 57-65

Foliation の Characteristic class と r-extension.

阪大 理　大和健二

多様体 M 上の Codim p foliation $(M, \mathcal{F})$ が r-extendable $(p>r>0)$ とは M 上の codim $(p-r)$ foliation $(M, \tilde{\mathcal{F}})$ が存在して，$\mathcal{F}$ の各 leaf は 1つの $\tilde{\mathcal{F}}$ の leaf に含まれる事と定義する。

Y. H. Clifton, J. W. Smith [1] は $r=1$ の時 leaf space に "Euler class" を定義して 1-extendable であるための十分条件を与えようとした。

一方 R. Moussu [2] は ある条件の下で 1-extendable であるための必要条件を exotic characteristic class によって与えた。

ここでは R. Moussu の結果の一般化について考える。

§1. Exotic characteristic classes.

ここでは normal bundle trivial な foliation

の exotic characteristic class の定義を述べる (cf. [3] [4]).

(M, $\mathcal{F}$) を codim p C^∞-foliation とする。

一般の場合に exotic characteristic class

$$\lambda^*_{\mathcal{F}} : H^*(WO_p) \longrightarrow H^*(M;\mathbb{R})$$

を定義するのと同様で まず cochain complex W_p を.

$$W_p = \Lambda(h_1, h_2, \dots, h_p) \otimes \mathbb{R}[c_1, \dots, c_p] / \{\deg \varphi > 2p\}$$

$$dh_i = c_i, \quad dc_i = 0$$

但. $\deg h_i = 2i-1$, $\deg c_i = 2i$

により定義し 次に $\nu(\mathcal{F})$ の basic connection ∇^1 を1つとる。今 $\nu(\mathcal{F})$ は trivial だから $\nu(\mathcal{F})$ の global frame $S = \{s_1, \dots, s_p\}$ によって与えられる trivialization $t : \nu(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}^p$ がある。この時 $\nu(\mathcal{F})$ 上の metric connection ∇^0 として $\nabla^0_X s_i \equiv 0$, $\forall i = 1, \dots, p$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ なるものがとれる。それで θ_1, θ_0 を ∇^1, ∇^0 の connection form とし Ω_t を $\nu(\mathcal{F})$ 上の connection $t\nabla^1 + (1-t)\nabla^0$ の curvature form とする。この時 準同型写像.

$$\lambda_{(\mathcal{F},t)} : W_p \longrightarrow A^*(M)$$

が

$$\lambda_{(\mathcal{F},t)}(c_i) = C_i(\Omega_1, \dots, \Omega_1) \in A^{2i}(M)$$

$$\lambda_{(\mathcal{F},t)}(h_i) = i\int_0^1 C_i(\theta_1 - \theta_0, \Omega_t, \dots, \Omega_t)\,dt \in A^{2i-1}(M)$$

但. C_i は Chern polynomials

として 一般の場合と全く同様に定義できる。その induced map $\lambda^*_{(\mathcal{F},t)} : H^*(W_p) \longrightarrow H^*(M;\mathbb{R})$ の像が normal bundle trivial の場合の exotic characteristic class である。もちろん これは $\mathcal{F}$ と t にのみ依存する。

§2. 定理

$(M, \mathcal{F})$ を codim p C^∞-foliation とする。

記号. $a > b$ に対して 準同型写像

$$\rho_{a,b} : WO_a \longrightarrow WO_b \quad (\text{又は } W_a \longrightarrow W_b)$$

を

$$\rho_{a,b}(c_i) = \begin{cases} c_i, & i \leq b \\ 0, & i > b \end{cases} \qquad \rho_{a,b}(h_i) = \begin{cases} h_i, & i \leq b \\ 0, & i > b \end{cases}$$

なるものとして定義し $O_{p,r} \subset H^*(WO_p)$ (又は $H^*(W_p)$) を

$$O_{p,r} = \mathrm{Im}\, \rho^*_{p+r,p} \cap \mathrm{Ker}\, \rho^*_{p,p-r}$$

とおく。また $j_p : WO_p \longrightarrow W_p$ は自然な包含写像とする。

定理 A.

$(M, \mathcal{F})$ が C^∞-foliation に 1-extendable

$\Rightarrow$ $^\forall \omega \in O_{p,1} \subset H^*(WO_p)$ に対して

$$\lambda^*_{\mathcal{F}}(\omega) = 0 \in H^*(M;\mathbb{R})$$

定理 B. $\nu(\mathcal{F})$ が trivial の時.

$(M, \mathcal{F})$ が normal bundle trivial な C^∞-foliation

に r- extendable

$\Rightarrow$ $\forall \omega \in O_{p,r} \cap \mathrm{Im}\, j_p^* \subset H^*(W_p)$ に対して

$$\lambda^*_{(\mathcal{F},t)}(\omega) = 0 \in H^*(M; \mathbb{R}).$$

ここで $t : \nu(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}^p$ は trivialization。

<u>注意 1.</u> 次の事はすぐ判る。

$[h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_n} \otimes c_{i_1} \cdots c_{i_m}] \in O_{p,r}$

$\Leftrightarrow$ (1) $\forall j_k \quad j_k + i_1 + \cdots + i_m > p + r$

かつ (2) $\exists j_k \quad j_k > p - r$ 又は $i_1 + \cdots + i_m > p - r$

また $O_{p,r}$ は上のような cohomology class で生成される。

<u>注意 2.</u> 定理Bで $(M, \mathcal{F})$ が $(\bar{M}, \bar{\mathcal{F}})$ に r-extend されたとし さらに $\nu(\bar{\mathcal{F}})$ の trivialization $\bar{t} : \nu(\bar{\mathcal{F}}) \longrightarrow \mathbb{R}^{p-r}$ が $\bar{t} = t|_{\nu(\bar{\mathcal{F}})}$ なるようにとれると仮定すれば $\forall \omega \in O_{p,r}$ に対して $\lambda^*_{(\mathcal{F},t)}(\omega) = 0$ が判る。これが $r=1$ の場合に R. Moussu の結果を含んでいる。また 上の時 generalized Godbillon-Vey class $\omega = [h_1 \wedge h_2 \wedge \cdots \wedge h_p \otimes c_1^p] \in H^*(W_p)$ について $\omega \notin O_{p,r}$ だけど $\lambda^*_{(\mathcal{F},t)}(\omega) = 0$ は判る。

§3. 定理の証明.

定理AもBも 証明は同様であるので 定理Bを示す。

今 codim p C^∞-foliation $(M, \mathcal{F})$ が C^∞-foliation $(M, \bar{\mathcal{F}})$ に r-extendable であるとし $t: \nu(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\bar{t}: \nu(\bar{\mathcal{F}}) \longrightarrow \mathbb{R}^{p-r}$ を各々の trivialization とする。

<u>(I)</u> $\nu(\mathcal{F}) = \nu(\bar{\mathcal{F}}) \oplus \tilde{\nu}$ とかける。

∇° (resp. $\bar{\nabla}^\circ$) を §1 におけるように trivialization t (resp. $\bar{t}$) によって一意的に決る $\nu(\mathcal{F})$ (resp. $\nu(\bar{\mathcal{F}})$) 上の metric connection とする。$\tilde{\nabla}^\circ$ を $\tilde{\nu}$ 上の metric connection とすれば $\nu(\mathcal{F})$ 上に $\nabla^{\circ\prime} = \bar{\nabla}^\circ \oplus \tilde{\nabla}^\circ$ なるもうひとつの metric connection が定義される。

また, $\bar{\nabla}^1$ を $\nu(\bar{\mathcal{F}})$ 上の basic connection とする時 $(M, \mathcal{F})$ が $(M, \bar{\mathcal{F}})$ に r-extendable である事より $\nu(\mathcal{F})$ 上の basic connection ∇^1 として

(i) $\nabla^1_X Y - \bar{\nabla}^1_X Y \in \Gamma(\tilde{\nu})$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \Gamma(\nu(\bar{\mathcal{F}}))$

(ii) $\nabla^1_X Y \in \Gamma(\tilde{\nu})$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \Gamma(\tilde{\nu})$

をみたすものがとれる。(ii)より $\tilde{\nu}$ 上の connection が得られる それを $\tilde{\nabla}^1$ とかく。

今 $\nu(\mathcal{F})$ の local frame $s = \{s_1, \dots, s_p\}$ を $\{s_1, \dots, s_{p-r}\}$ は $\nu(\bar{\mathcal{F}})$ の, $\{s_{p-r+1}, \dots, s_p\}$ は $\tilde{\nu}$ の local frame であるようにとる。これによって表わされる 上の connections の connection form を 順に θ_0, $\bar{\theta}_0$, $\tilde{\theta}_0$, θ_0', $\bar{\theta}_1$, θ_1, $\tilde{\theta}_1$ とおけば 次が成立す

る。

$$\underline{(3.1)} \qquad \theta_0' = \left(\begin{array}{c|c} \bar{\theta}_0 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{\theta}_0 \end{array}\right) \qquad \theta_1 = \left(\begin{array}{c|c} \bar{\theta}_1 & * \\ \hline 0 & \tilde{\theta}_1 \end{array}\right)$$

<u>(注)</u> 定理Bの注意2のように $\bar{t} = t|_{\nu(元)}$ なる条件があれば $\nabla^0 = \nabla^{0'}$ と出来て $\theta_0 = \theta_0'$ となる。

<u>(II)</u> $\omega \in W_p$ (resp. W_{p-r}) に対して $\lambda_{(元,t)}(\omega)$ (resp. $\lambda_{(元,\bar{t})}(\omega)$) を $\omega(元)$ (resp. $\omega(元)$) と書く。また、Ω_t' を $\nu(元)$ 上の connection $t\nabla^1 + (1-t)\nabla^{0'}$ の curvature form として

$$\mathfrak{h}_i'(元) = i\int_0^1 C_i(\theta_1 - \theta_0', \Omega_t', \ldots, \Omega_t')\,dt$$

とおく。但. C_i は Chern polynomial である。

$$\frac{d}{dt} C_i(\Omega_t', \ldots, \Omega_t') = d(i \cdot C_i(\theta_1 - \theta_0', \Omega_t', \ldots, \Omega_t'))$$

に注意して (3-1)より 計算すれば 次を得る。

<u>補題(3.2).</u> $\tilde{\Omega}_1$ を $\tilde{\nabla}^1$ の curvature form とすれば

(1) $\displaystyle C_i(元) = \sum_{j+h=i} C_j(元) \wedge C_h(\tilde{\Omega}_1, \ldots, \tilde{\Omega}_1)$, $i = 1, \ldots, p$.

(2) $i > r$ の時

$$\mathfrak{h}_i'(元) = \sum_{j+h=i} \mathfrak{h}_j(元) \wedge C_h(\tilde{\Omega}_1, \ldots, \tilde{\Omega}_1) + dT_i$$

但 ここで $C_0(-) = 1$, $j > p-r$ の時 $C_j(元) = \mathfrak{h}_j(元) = 0$, $h > r$ の時 $C_h(\tilde{\Omega}_1, \ldots, \tilde{\Omega}_1) = 0$ とする。

<u>(注)</u> (I)の注と同じく $\bar{t} = t|_{\nu(元)}$ ならば 微分形式として $\mathfrak{h}_j'(元) = \mathfrak{h}_j(元)$ である。

(III) $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq p$, $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_m \leq p$ として
$J = \{j_1, \ldots, j_n\}$, $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ とおき

$$|I| = i_1 + \cdots + i_m$$

$$h_J \cdot c_I = h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_n} \otimes c_{i_1} \cdots c_{i_m} \in W_p$$

とする。 また

$$h'_J(\text{元}) = h'_{j_1}(\text{元}) \wedge \cdots \wedge h'_{j_n}(\text{元})$$

とおく。 §2 注意1を見れば 次の補題より 定理Bを得る。

補題(3.3) J, I は 上の通りとする。

(1) $[h_J \cdot c_I] \in \mathrm{Im}\, j_p^* \subset H^*(W_p)$

$\Rightarrow$ $h'_J(\text{元}) \wedge c_I(\text{元}) = (h_J \cdot c_I)(\text{元}) +$ exact

(2) $j_1 + |I| > p + r$

$\Rightarrow$ $h'_J(\text{元}) \wedge c_I(\text{元}) = (h_J \cdot c_I)(\text{元}) +$ exact

ここで, もちろん, $|I| > p-r$ 又は $^{\exists} j_k > p-r$ ならば $(h_J \cdot c_I)(\text{元}) = 0$

(3-3) の証明.

(1)はよく知られている。 (2) を示す。

仮定より, $\mathrm{Pont}^*(\tilde{\nu}) = 0 \quad (* > 0)$ 従って

$$c_k(\tilde{\Omega}_1, \ldots, \tilde{\Omega}_1) = d\tilde{h}_k, \quad {}^{\exists}\tilde{h}_k \in A^{2k-1}(M)$$

また $d\, h_k(\text{元}) = c_k(\text{元})$ である。 これより (3.2)

(2) は $j > r$ の時

$$(*)\quad h_j'(\mathcal{F}) = h_j(\bar{\mathcal{F}}) + \sum_{\substack{i+k=j \\ 0<k\le r}} c_i(\bar{\mathcal{F}}) \wedge \hat{\tilde{h}}_k + \text{exact}$$

と書ける。

今 $j_1+|I|>p+r$ だから $\forall j_k > r$ としてよい。(*)より $j_1+|I|>p+r$ に注意して Bott's vanishing theorem を使えば

$$(**)\quad h_J'(\mathcal{F}) \wedge c_I(\mathcal{F}) = h_J(\bar{\mathcal{F}}) \wedge c_I(\mathcal{F}) + \text{exact}$$

を得る。

次に (3.2)(1) を

$$c_i(\mathcal{F}) = c_i(\bar{\mathcal{F}}) + e_{i1} + \cdots + e_{ir}$$

$$e_{ik} = c_{i-k}(\bar{\mathcal{F}}) \wedge c_k(\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_1)$$

$$= c_{i-k}(\bar{\mathcal{F}}) \wedge d\tilde{h}_k$$

とみて 再び $j_1+|I|>p+r$ に注意して Bott's vanishing theorem を使えば

$$(***)\quad h_J(\bar{\mathcal{F}}) \wedge c_I(\mathcal{F}) = (h_J c_I)(\bar{\mathcal{F}}) + \text{exact}$$

を得る。従って (**)と合せれば (2) を得る。(証終)

また 上の証明を見れば (II)の注 より 条件「$\theta = t|_{\nu(\bar{\mathcal{F}})}$」の下では §2 注意2の前半が得られる事は明らか である。

References.

[1] T.H. Clifton and J.W. Smith : The euler

class as an obstruction in the theory of foliations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963) 949 - 954.

[2] R. Moussu: Sur les classes exotiques des feuilletages. Lecture Notes in Math. 392 Springer - Verlag.

[3] R. Bott: Lectures on Characteristic Classes and Foliations. Lecture Notes in Math 279 Springer - Verlag.

[4] A. Haefliger: Sur les classes caractéristiques des feuilletages. Séminaire BOURBAKI 24e année 1971/72. n° 412.