数理解析研究所講究録
第 265 巻 1976 年 76-88

C^*-環における近似問題

山形大 理 富山淳

最近反例がスウェーデンの若い数学者Enfloによってつくられ話題をまきおこしたBanach空間の近似性質は、よく知られているようにGrothendieckによる次のテンソル積による定式化がある。([3])。即ち、E, FをBanach空間とし、その最大クロスノルムによるテンソル積を$E\otimes_\gamma F$, 最小クロスノルムによるテンソル積を$E\otimes_\lambda F$とかくことにすると、Eが近似性質をもつことと、任意のBanach空間Fについて$E\otimes_\gamma F$から$E\otimes_\lambda F$への共役な対応が1対1であることは同値である。この形をC^*-環のテンソル積にあてはめると次のように一見この問題がとけているかの様な様子になる。Banach $*$環においてその$*$-対応が$\|x^*x\| = \|x\|^2$という関係をみたしているとき、これをC^*環という。C^*-環はヒルベルト空間上の有界作用素のつくる自己共役でノルム閉な部分環として常に$*$-同型に表現出来る。今A, BをC^*-環とするとき、その代数的なテンソル積$A\odot B$

(*環)上のクロスノルムβによる完備化 $A\otimes_\beta B$ が C^*-環になっているならば、βを C^*-クロスノルムと呼ぶ。C^*-クロスノルムの代表的なものは、A, B をそれぞれヒルベルト空間 H, K 上の有界作用素のつくる C^*-環と考えたとき、$A\odot B$ を自然な形で、ヒルベルト空間 $H\otimes_\gamma K$ 上の有界作用素のつくる環とみなして出来たノルムである。ところが一般には与えられた A と別な C^*環 B について $A\odot B$ 上の C^*-クロスノルムは一意ではなく、上のノルム(α-ノルムという)はその中で最小なノルムになっている(竹崎[7])。そこでそのような環 A(例えば2ケの生成元をもつ自由群の正則表現からつくられた C^*-環)と B とクロスノルム β(>α)をとり $A\otimes_\beta B$ から $A\otimes_\alpha B$ への自然な対応を考えると、C^*-環においては像が稠密であれば自動的に全体になるという性質があるので上の対応は onto な準同型になり、$\beta\neq\alpha$ よりこの核が零でないイデアルになる。そこで

$$A\otimes_\gamma B \longrightarrow A\otimes_\beta B \longrightarrow A\otimes_\alpha B \longrightarrow A\otimes_\lambda B$$

という系列を考えると、$A\otimes_\gamma B$ から $A\otimes_\lambda B$ への対応が1対1でないことになって、A, B が近似性質をもたないバナッハ空間の例になりそうなのであるが $A\otimes_\gamma B$ の $A\otimes_\beta B$ 内での像の様子がわからず現在の所ではその判定がついていない(もたないだろうというのが予想である)。一方テンソル積については

近似問題の別の定式化がある(Waelbroeck [12]). E, F をバナッハ空間, X, Y をその共役空間 E^*, F^* の単位球としそれぞれに弱*位相を考えておく。このとき $E\otimes_\lambda F$ を含む次の三つのバナッハ空間は互に同型になっている.

1) E^* から F への線型写像で X 上で連続であるものの全体

2) F^* から E への線型写像で Y 上で連続であるものの全体

3) $E^*\times F^*$ 上の双線型汎関数で $X\times Y$ 上で連続なものの全体

そこでこれらを同一視して E, F の新しいテンソル積 $E\varepsilon F$ を考えると、E が近似性質をもつことは任意の F について $E\varepsilon F$ が $E\otimes_\lambda F$ と一致することと同値になる。さてここで連続関数の空間 $C(X), C(Y)$ と $C(X)\otimes_\lambda C(Y)$ を考えると、$E\otimes_\lambda F$ と $E\varepsilon F$ とは自然な形で $C(X)\otimes_\lambda C(Y)=C(X\times Y)$ の部分空間と考えることが出来る。そこで $\varphi\in C(X)^*$ について写像

$$R_\varphi ; C(X)\otimes_\lambda C(Y) \longrightarrow C(Y)$$

を

$$R_\varphi\Big(\sum_{i=1}^n f_i\otimes g_i\Big) = \sum_{i=1}^n \langle f_i, \varphi\rangle g_i$$

と定義しこれを右Fubini写像と呼ぶ。同様に $\psi\in C(Y)^*$ について左Fubini写像 L_ψ が定義出来、両者は $x\in C(X)\otimes_\lambda C(Y)$ について次の関係をもっている.

$$\langle x, \varphi\otimes\psi\rangle = \langle R_\varphi(x), \psi\rangle = \langle L_\psi(x), \varphi\rangle \cdots (*)$$

そこで $C(X)\otimes_\lambda C(Y)$ の部分空間 $F(E, F)$ を

$$F(E,F)=\{x\in C(X)\check{\otimes}C(Y)\mid R_\varphi(x)\in E,\ L_\psi(x)\in E,$$
$$\forall\varphi\in C(X)^*,\ \psi\in C(Y)^*\}$$

とおくと、これは二変数関数 $x(s,t)$ の空間の中で

$$F(E,F)=\{x\in C(X\times Y)\mid x(s,\cdot)\in F,\ x(\cdot,t)\in E$$
$$\forall s\in X,\ t\in Y\}$$
$$=C(X,F)\cap C(Y,E)=C(X)\check{\otimes}F\cap E\check{\otimes}C(Y)$$

という形をしており結局前の $E\otimes F$ と同じものであることが言える。即ち E が近似性質をもつことは任意の F について $F(E,F)$ が $E\check{\otimes}F$ と一致することと同値である。更に又上の定式化で $F(E,F)$ は特別に $C(X)\check{\otimes}C(Y)$ の中ばかりでなく任意の E,F を含むバナッハ空間 $\hat{E},\hat{F}$ について

$$F(E,F)=\{x\in\hat{E}\check{\otimes}\hat{F}\mid R_\varphi(x)\in F,\ L_\psi(x)\in E,\ \forall\varphi\in\hat{E}^*,\psi\in\hat{F}^*\}$$

とおけば同じことが言える。ここで上の一種のテンソル積 $F(E,F)$ は E,F が関数環の時の slice 積の一般化であり写像 R_φ, L_ψ は特に φ,ψ は point evaluation の時には slice map と呼ばれていたものであるが（富山 [9], [10] 参照）、この種の議論の中で大事な働きをする (*) の式は重積分の Fubini の定理の抽象化と考えることが出来るのでここでは上のような呼び方をし、$F(E,F)$ を Fubini 積と呼ぶことにする。そこで本稿の目的は C^*-環における上の形での近似問題を考えることである。

§1. C^*-環のFubini積. A, BをC^*環 C, DをそれぞれA, Bを含むC^*環とする. このとき最小のC^*-クロスノルムαはその定義から局所的な性質をもつので$A\otimes_\alpha B$は$C\otimes_\alpha D$のC^*-部分環になる。そこで

$$F(A, B)=\{x\in C\otimes_\alpha D \mid R_\varphi(x)\in B,\ L_\psi(x)\in A\ \ \forall\varphi\in C^*, \psi\in D^*\}$$

とおきC^*環A, Bの、$C\otimes_\alpha D$についての、Fubini積と呼ぶことにする. $F(A, B)$は$C\otimes_\alpha D$内の自己共役な閉部分空間である.

問題. $F(A, B)=A\otimes_\alpha B$であるか又は$F(A, B)$は$A\otimes_\alpha B$と異なる$C^*$-環を含むか？ このことが一般に否定的であるならばAが任意の三つ組(B, C, D)について$F(A, B)=A\otimes_\alpha B$となるのはどのようなときか？

上の問題はこれまでのべたようにバナッハ空間の近似問題のC^*環的な定式化であるがそれはC^*-環自身の問題をも含んでいてその限りでもC^*-テンソル積での基本的問題であるといえる. C^*-環A_1, B_1より他のC^*-環A_2, B_2への$*$-準同型をπ_1, π_2とすると、$A_1\otimes_\alpha B_1$から$A_2\otimes_\alpha B_2$への$*$-準同型積写像$\pi_1\otimes\pi_2$がつくれる. そこで特にπ_2が同型であるときを考え、π_1の核をI_1とおくと

$$(\pi_1\otimes\pi_2)^{-1}(0)=F(I_1, B_1)$$

となり上の問題はここでは$\pi_1\otimes\pi_2$の核が$I_1\otimes_\alpha B_1$とかけるかという話になる. 一般にπ_2も核I_2をもつとき、A_1又はB_1がI型のC^*環であれば

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)^{-1}(0) = I_1 \otimes_\alpha B_1 + A_1 \otimes_\alpha I_2$$

となることが知られているが他の場合にどうなるかはわかっていない。C^*環の基本的なわけ方として上のI型のC^*環(すべての表現がI型のvon Neumann環を生成する)があるがこれは可分なときにはその既約表現の像が常にコンパクト作用素を含むということと同値である。可分な任意のC^*-環には必ず最大のI型イデアルが存在してその商環はもはやI型のイデアルをもたないようになっている(NGCR環という)。従ってC^*環のテンソル積の型をきめる問題は$A \otimes_\alpha B$の中の最大のI型イデアルKとそれぞれの中の最大のI型イデアルK_1, K_2の間に$K = K_1 \otimes_\alpha K_2$という関係があるかという問題に帰着するが、結果は一般に$K = F(K_1, K_2)$でありその先は特別な場合しか$K = K_1 \otimes_\alpha K_2$はわかっていない(各個に型をきめるという方法では問題は解決している。富山[9])。最小テンソル積ではその定義からわかるようにそのノルムは積状関数$\varphi \otimes \psi$の族によって完全に決定されている。我々の問題はその中で$\{\varphi \otimes \psi\}$が更にC^*部分環やイデアルを分離しているのかという問である。尚他のC^*-環Bについて$A \odot B$上のC^*-クロスノルムが常にαに等しいようなC^*環Aを他のときと同じくnuclear C^*環と呼ぶ。可分なI型C^*環又離散的なamenable群のC^*-群環はnuclearである(Lance[4])。

§2. von Neumannテンソル積の場合. M, Nをそれぞれヒルベルト空間H, K上のvon Neumann環とすると, $M \otimes_{\mathrm{alg}} N$の弱位相による閉包としてvon Neumann環としてのテンソル積$M \bar{\otimes} N$が定義出来る。更に$B(H)$, $B(K)$をそれぞれの空間上の有界作用素全体のつくるvon Neumann環とすると, $B(H)$上の任意の弱*連続な汎関数φについて（$\varphi \in B(H)_*$とかく）$B(H) \bar{\otimes} B(K) = B(H \otimes K)$から$B(K)$への弱*連続な右Fubini写像$R_\varphi$が定義出来る。$L_\psi$（$\psi \in B(K)_*$）についても同様である。そこで$M$, Nの$B(H) \bar{\otimes} B(K)$についてのFubini積を

$$\mathcal{F}(M, N) = \{x \in B(H) \bar{\otimes} B(K) \mid R_\varphi(x) \in N,\ L_\psi(x) \in M,\ \forall \varphi \in B(H)_*,\ \forall \psi \in B(K)_*\}$$

と定めると次のことが成立つ。von Neumann環Mについて$B(H)$内でMと可換な元全体を通常M'とかき, Mの ~~commutator~~ commutantと呼ぶ。

定理2.1. $\mathcal{F}(M, N) = M \bar{\otimes} N$ということと$(M' \bar{\otimes} N')' = M \bar{\otimes} N$なることとは同値である。

後者の等式は通常$(M \bar{\otimes} N)' = M' \bar{\otimes} N'$の形で考えられ, von Neumann環の理論の中で基本的な役割を果している式である。これが一般に成立するかどうかは長い間の懸案であったが近年富田－竹崎理論の結果としてその成立が保証されるに至っている（竹崎[6]）。従ってこの場合には任意のvon Neumann

環が上の形での近似性質をもつと言える. 上の等式の重要さを示す例を二,三あげてみる

1) M_1, N_1 を H 上の von Neumann 環, M_2, N_2 を K 上の von Neumann 環とすると $M_1\bar{\otimes}M_2 \cap N_1\bar{\otimes}N_2 \subset \mathcal{F}(M_1\cap N_1, M_2\cap N_2)$, よって $M_1\bar{\otimes}M_2\cap N_1\bar{\otimes}N_2 = (M_1\cap N_1)\bar{\otimes}(M_2\cap N_2)$, 特に $N_1\subset M_1$, $N_2\subset M_2$ のとき relative commutant について

$$(N_1\bar{\otimes}N_2)'\cap M_1\bar{\otimes}M_2 = (N_1'\cap M_1)\bar{\otimes}(N_2'\cap M_2).$$

2) F, G をそれぞれ M, N の $*$-自己同型群, その不動化環を M_F, N_G とし $*$-自己同型群 $F\times G$ の $M\bar{\otimes}N$ での不動化環を $(M\bar{\otimes}N)_{F\times G}$ とすると $(M\bar{\otimes}N)_{F\times G}\subset \mathcal{F}(M_F, N_G)$, よって

$$(M\bar{\otimes}N)_{F\times G} = M_F\bar{\otimes}N_G$$

§3. C^*環についての結果. C^*-環は von Neumann 環ほどよい構造にはなっていないので C^*-Fubini 積について我々の問題が§2のような形で解決がつくとは考え難い面がある. 従って現在の所わかっているのは C^*-テンソル積に入ることの判定が比較的たやすい場合だけである.

定理(富山[17]). A をその既約表現が有限次元で且つその次元が有界であるような C^*環とする. このとき任意の C^*環の三つ組 (B, C, D) $(A\subset C,\ B\subset D)$ について

$$F(A, B) = A\otimes_{\alpha} B$$

証明はこの場合でもいささか長くなり次のような段階で行われる.

補題3.1. $\varphi \in A^*$ をとり $\tilde{\varphi}$ をその C までの拡大とする. このとき $x \in F(A, B)$ について $R_{\tilde{\varphi}}(x)$ の値は φ のみに関係する. そこで $\Phi_x(\varphi) = R_{\tilde{\varphi}}(x)$ とおくと Φ_x は A^* から B への線型写像で A^* の単位球上で弱$*$連続である.

A を既約表現の次元が一定の n であるような C^*環(n-homogeneous C^*環という)とし X をその dual とする. このとき X は局所コンパクトハウスドルフ空間であり $a \in A$ について関数 $t \longrightarrow \|a(t)\|$ は ~~連続~~ 無限大で 0 になる連続関数であることが知られている. ただし既約表現 t について $t(A) = A(t)$, $t(a) = a(t)$ とおく。そこで fibre 空間 $\{X, A(t)\}$ とその上の operator field の集合 $\mathfrak{A} = \{a(t) \mid a \in A\}$ を考える. $\{X, A(t)\}$ 上の field $x(t)$ が $\mathfrak{A}$ について連続であるということを

$$\forall \varepsilon > 0,\ t \in X\ \exists U(t\text{の近傍}),\ a \in A;\ \|x(s) - a(s)\| < \varepsilon\ \ \forall s \in U$$

と定める. このとき A はこの fibre 空間上の無限大で 0 になる $\mathfrak{A}$-連続な operator field 全体のつくる C^*環($\|x\| = \sup\|x(t)\|$)と同型になる(実際はもっと詳しく fibre bundle 上の cross-section になる). そこで準同型 $t \otimes 1;\ A \otimes_\alpha B \longrightarrow A(t) \otimes_\alpha B$ を考え $x(t) = t \otimes 1(x)$ とすると

補題3.2. $t \longrightarrow \|x(t)\|$ は ∞ で 0 になる連続関数で, $A \otimes_\alpha B$ は

$\{X, A(t)\underset{\alpha}{\otimes}B\}$ 上の $\{x(t) \mid x \in A\underset{\alpha}{\otimes}B\}$－連続な∞で0になるfield全体のつくる$C^*$－環と同型になる。

次にtを空間K（⊃H）上へのCの表現π_tに拡大し、$p(t)$をHへの射影、$z(t)$を$\pi_t(A)'$での$p(t)$のcentral coverとする。

補題3.3. $x \in F(A, B)$ ならば $\pi_t \otimes 1(x)(z(t)\otimes 1) \in \pi_t(A)_{z(t)}\underset{\alpha}{\otimes}B$.

今$\theta(t)$を$\pi_t(A)_{z(t)}$から$A(t)$への同型対応、$\theta(t)\otimes 1$を$\pi_t(A)_{z(t)}\underset{\alpha}{\otimes}B$より$A(t)\underset{\alpha}{\otimes}B$へのそれとする。上の補題から$x$について各$A(t)\underset{\alpha}{\otimes}B$内に$\hat{x}(t)$を $\hat{x}(t) = \theta(t)\otimes 1[\pi_t \otimes 1(x)(z(t)\otimes 1)]$ となるようにとれる。

補題3.4. $\hat{x}(t)$はX上の∞で0になる、$A\underset{\alpha}{\otimes}B$－連続なfieldである。

以上からAがn－homogeneousの時は定理が成立つことが保証され、あとはこの場合に帰着させることを「有限回」つみ重ねるといった形で証明を終る。

この定理の直接の結果としてはさきにのべたことが当然含まれるがその他例えばAが可換な時には定理が成立するから、A、Bを単位元をもつC^*－環とし、A, BとA$\underset{\alpha}{\otimes}$Bの中心をそれぞれ$Z_1$, Z_2, Zとしたとき、$Z = Z_1 \underset{\alpha}{\otimes} Z_2$ が成立することなどが言える。

§4. 結語. 前にものべたように上の問題は、Banach空間

の近似問題の C^*-環的な定式化であるが C^*-テンソル積の枠内でも最大の C^*-クロスノルム ν が存在するので C^*-テンソル積間の共役写像 $A \otimes_\nu B \longrightarrow A \otimes_\alpha B$ が常に onto であることを考えると、これが1対1であることはとりもなおさず ν-ノルムと α-ノルムの等しいこと、即ち nuclearity 自体が C^*-環としての近似性質を示すものと考えることが出来る。このような見方は既に Effros-Lance によって[4], [13]等に使われ研究されていたが、ごく最近 Choi-Effros [14]は一般論としても注目すべき次の結果を証明した。

定理. C^*-環 A について次のことは同値である。

(1) A が nuclear

(2) A の恒等写像は有限階の completely positive 写像で各点ごとのノルム~~位相~~収束位相で近似出来る。

ここで (2) $\Rightarrow$ (1) の部分は Lance [4] によって証明されている。上の (1) $\Rightarrow$ (2) の結果の1つの大きな帰結は nuclear な C^*-環は Banach 空間として近似性質をもつことが判明したことである。ここで C^*-環を Banach $*$-環の中で特徴づけているのはその positive cone の構造であるから、上の近似性質の中に (positive map でなく) completely positive な写像が登場してくるのはその意味では自然なわけである。本稿の問題についても種々な状況から考えて最底、可分な nuclear C^*-環

については前節の定理が成立するのではないかと思われる。

文献

1. J. Dixmier, Les C*-algèbres et leurs représentations, 1964.
2. P. Enflo, A counter example to the approximation problem in Banach spaces, Acta Math., 130 (1973), 309-317
3. A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc. 1966
4. C. Lance, On nuclear C*-algebras, J. Funct. Anal., 12 (1973), 157-176
5. E. G. Effros, Approximation problems for C*-algebras, preprint
6. 竹崎正道, Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Springer lecture note 128, 1970
7. ———, On the cross-norm of the direct product of C*-algebras, Tôhoku Math. J., 16 (1964), 111-119
8. 竹崎－富山, Applications of fibre bundles to a certain class of C*-algebras, Tôhoku Math. J., 13 (1961), 498-522
9. 富山淳, Applications of Fubini type theorem to the tensor product of C*-algebras, Tôhoku Math. J., 19 (1967) 213-226
10. ———, Slice algebra について, 数理研内数理研究会講究録, 1969, 33-43

11. ———, Tensor products and the approximation problems of C^*-algebras, Publ. Research Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., 11 (1975), 163-183.

12. L. Waelbroeck, Duality and the injective tensor products Math. Ann., 163 (1966), 122-126

13. E. G. Effros - C. Lance, Tensor products of operator algebras, preprint

14. Man-Duen Choi - E. G. Effros, Nuclear C^*-algebras and the approximation property, preprint