数理解析研究所講究録
第265巻 1976年 105-114

関数空間における最良近似

早大 教育 和田淳蔵

最良近似の問題は古くから研究され、応用面も非常に広い。ここで考えるのは Banach 空間、とくに関数空間における最良近似である。§1では Banach空間における最良近似の基礎的な性質を述べる。§2では実数値連続関数の空間、§3では複素値連続関数(解析関数)の空間における最良近似について論ずる。§4では射影作用素と最良近似との関係を述べ、§5では他の関数空間における最良近似について考える。

§1. 定義、基礎的性質

Eを Banach空間とし、Mをその閉部分空間とする。

E∋xに対して、ある$y \in M$が存在して

$$\|x-y\| = d(x, M) = \inf_{z \in M} \|x-z\| \quad (*)$$

となるとき、yはxのMにおける最良近似（*best approximation of x in M*）という．一般には(＊)のようなyは存在するとは限らないし、また存在しても一意とは限らない。

Eのすべての元xに対して，xのMにおける最良近似が存在するとき、Mは条件（P）をみたすということにする．またEのすべての元xに対して、xのMにおける最良近似が一意に存在するなら，MはHaarの条件をみたすという．そのときMをHaar部分空間であるという場合もある．

たとえばEをBanach空間としたとき、Eの共役空間E^*のw^*－閉部分空間は（P）をみたす．なぜなら、MはE^*のw^*-閉部分空間とし、$x \in E^* \setminus M$とする．$C_n = x + [d(x, M) + \frac{1}{n}] U^*$（$U^*$は$E^*$の閉単位球）とおけば、$\{C_n \cap M\}$は空でない$w^*$－コンパクト集合の列であり、$C_{n+1} \cap M \subset C_n \cap M$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）．いま$\bigcap_{n=1}^{\infty} (C_n \cap M) \ni y$とすれば$\|x - y\| = d(x, M)$．

つぎにノルム空間Eとその部分空間Mを考える．Mの上で定義された有界線型汎関数fがノルムを保ってEの上の有界線型汎関数Fに拡張できる（Hahn－Banachの定理）。いま任意のfに対してFがただ1つ存在する場合を考える．そのときMは条件（U）をみたすということにする．つぎはHaarの条件と条件（U）との関係である（[12]）．

定理1.1　Banach空間Eの閉部分空間Mが条件(U)をもつ必要かつ十分条件は $M^{\perp} = \{f \in E^* : f(M) = 0\}$ が E^* の中でHaarの条件をみたすことである。

§2　$C_R(X)$ の場合

Xをコンパクト Hausdorff空間とし、$C_R(X)$ をXの上の実数値連続関数全体(ノルムは一様ノルム)のBanach空間とする。$C_R(X)$ における最良近似は古くから研究されている。Haar [5] はトリビアルでないHaar部分空間が存在しないXの存在を示した。そのあとMairhuber [11] はXがk次元Euclid空間$\mathbb{R}^k$のコンパクト部分集合であるとき、$C_R(X)$ が次元n (>1) のHaar部分空間をもてば、Xは単位円のあるコンパクト部分集合に同相であることを証明した。さらにCurtis [3] はそれを一般化して、Xがコンパクト Hausdorff空間の場合を考えた。

R. R. Phelps [12] はつぎを証明した。

定理2.1　Xをコンパクト連結 Hausdorff空間とする。Mを $C_R(X)$ の閉部分空間で $C_R(X)/M$ の次元が有限 (≥ 1) とする。そのときMが $C_R(X)$ のHaar部分空間であれば、ある $f \in C_R(X)^*$, $f > 0$ で $M = f^{-1}(0)$ となる(Phelpsは逆も成り立つとしているが、反例が作れる。fを表わす測度の台がXならよい)。

注意　Xが連結でない場合は定理2.1は成り立たない。この場合の $\dim C_R(X)/M < +\infty$ となるHaar部分空間Mや(P)をみたすMは大変複雑である。

Mが $C_R(X)$ の中のn次元部分空間としたときはつぎが成り立つ([12])。

定理2.2　Xをコンパクト Hausdorff 空間とし、Mを $C_R(X)$ の中のn次元部分空間とする。そのときMは $C_R(X)$ の中でHaarの条件をみたすための必要かつ十分条件はMの任意の関数 $f\ (\neq 0)$ に対して $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ の個数は $\leqq n-1$ となることである。Xが局所コンパクト Hausdorff 空間のとき、Mを、∞で0となるXの上の実数値連続関数全体の空間 $C_0(X)$ のn次元部分空間としてもよい。

§3　C(X)の場合

Xをコンパクト Hausdorff 空間、C(X)をXの上の複素値連続関数の全体の Banach 空間(ノルムは一様ノルム)とする。AをC(X)の部分空間とする。

定理3.1　$g \in C(X)$ のAにおける最良近似を f_0 とする。いま $L \in C(X)^*$, $\|L\| = 1$, $L(A) = 0$, $L(g) = \|g\|_A = \inf_{f \in A} \|g-f\|$ としたとき、$g - f_0 = \|g\|_A \overline{\Phi}$ (a.e. $d\mu$) と

なる．ここで $\varphi d\mu$ ($\mu \geqq 0$) は L に対応する X の上の測度に関する polar decomposition である．

いま X を $\mathbb{C}$ の中の単位円 Γ とし、A をディスク環とするとき定理3.1はつぎのようになる（[14]）．

<u>定理3.2</u>　$g \in C(\Gamma)$ が A において最良近似をもつための必要かつ十分条件は $g = f_0 + \lambda h$ の形となることである．ここで $f_0 \in A$, $\lambda \geqq 0$, $h \in C(X)$, $|h| \equiv 1$ でかつ h は $\varphi \in H^1$, $\int \varphi\, dm = 0$ となるある φ で $h = |\varphi|/\varphi$ (a.e. m), m は Γ 上の Lebesgue 測度である．また $g \in C(\Gamma)$ が A において最良近似をもてば、それは一意にきまる．

<u>定理3.3.</u>　$C(\Gamma) \ni g$ が $g = \sum_{j=0}^{n} b_j \bar{z}^{j+1}$ の形であれば、g は A における（一意の）最良近似として有理関数 f_0 をもつ（[7]）．

<u>注意</u>　a) たとえば $g = 3\bar{z} + 2\bar{z}^2$ なら $f_0 = 3/(z+2)$ となる．

b) Γ の上の連続関数で A における最良近似をもたないものが存在する（[8]）．

X をコンパクト Hausdorff 空間とし、E を $C(X)$ の閉部分空間で、$E \ni 1$、E は X の点を分離すると仮定する．

<u>定理3.4.</u>　$\mathrm{car}\,\mu \subset \partial_E$, $\mu \perp E$ となる任意の 0 でない測度 μ の台は E の Shilov 境界 ∂_E と一致すると仮定する．もし $f \in C(X)$,

$f \notin E$に対して、ある∂_Eの点が$[E, f]$のChoquet境界に含まれないとし、かつ$\partial_{[E,f]} = \partial_E$とすれば、$f$の$E$における最良近似は存在しない。

これにより、$\mathbb{C}$のコンパクト部分集合Kに対して$A(K)$の関数の$R(K)$における最良近似が論じられる。

注意　Blatter and Seever [2]はディスク環Aに対して、AはA^{**}の中で条件(P)をみたさないことを示した。しかしこれは$C(\Gamma)$の元でAにおける最良近似が存在しないものがあることからも証明できる。

§4　関数環への射影作用素

W. Rudin [13]はつぎのことを示した：Γを単位円、Aをディスク環とする。そのとき$C(\Gamma)$からAの上への有界射影作用素は存在しない。このことがらをGlicksberg [4]はAが一般の関数環の場合に拡張した。つぎはそこで用いられた定理である。

定理 4.1　XをコンパクトHausdorff空間、Aを$C(X)$の閉部分多元環とし、AのShilov境界∂_AはXに一致すると仮定する。$B \subset C(X)$は閉A-モジュルで$Z(B) = \bigcap_{f \in B} f^{-1}(0)$は$X$で疎であるとする。$C(X) \supset F \supset B$となる閉部分空間$F$に対して

$$T : F \to C(X)$$

を有界線型作用素で、$Tb = b$ $(b \in B)$ とする。そのとき $\|T - I\| = \|T\| - 1$。ここで I は恒等作用素である。

これからつぎが容易に導かれる([14])。

定理4.2　A を $C(X)$ の閉部分多元環、$A \neq C(X)$, $\partial_A = X$, $Z(A)$ は X で疎とする。いま T を $C(X)$ から A の上への有界射影作用素としたとき、$C(X)$ の任意の関数 f に対して Tf が f の A における最良近似であるための必要かつ十分条件は $\|T\| = 2$ となることである。

例。X をコンパクトHausdorff空間、F を X の閉部分集合とし、$A = \{f \in C(X) : f(F) = 0\}$ とおく。$U : C(F) \to C(X)$ をノルム1の線型拡張作用素(Linear extension operator)とする。すなわち U は線型で、$C(F) \ni f$ に対して $(Uf)|F = f$ で $\|U\| = 1$ とする。そのとき $f \in C(X)$ に対して

$$Tf = f - U(f|F)$$

とおけば、T は $C(X) \to A$ の射影作用素で、Tf は f の A における最良近似となっている。

注意　なお $X = \partial_A$ で $Z(A) = \phi$ の場合は $T : C(X) \to A$ となる有界射影作用素 T に対してはいつでも $\|T\| > 2$ となっていることが知られている([4])。

§5、他の関数空間の場合

(1) L^∞ の場合

Xをパラコンパクトで Lindelöf の性質をもつ位相空間、μをXの上のBorel測度であって、空でない開集合Uに対しては$\mu(U)>0$とする。そのとき$L^\infty(X,\mu)$の任意の元fは$C_R^\infty(X)$において最良近似をもつ([10])。

(2) L^1 の場合

Xを集合とし、Xの上にBorel集合族Σと非負測度μが定義されているとする。

a) 測度空間(X,Σ,μ)が原子元をもたないなら$L^1=L^1(X,\Sigma,\mu)$の閉部分空間Mで$\dim L^1/M<+\infty$となるならMはHaar部分空間にはなり得ない。

b) (X,Σ,μ)が原子元をもたないなら、L^1は有限次元のHaar部分空間をもたない。

(3) c_0, l^1 の場合

c_0では$\dim c_0/M<\infty$となるMはHaar部分空間にはなり得ない。c_0の有限次元部分空間MがHaar部分空間となる条件は定理2.2と同じ。またc_0, l^1について、その一次元部分空間もHaar部分空間になるとは限らない(任意の一次元部分空間がHaar部分空間となる条件は強凸性(strict convexity)と同等)。

(4) Banach 空間Eが反射的 (reflexive) となる必要かつ十分条件は、Eのすべての閉部分空間が (P) をもつことである。

参照文献

[1] J. Blatter : Grothendieck Spaces in Approximations Theory, Memoirs. A. M. S. 120, 1972.

[2] J. Blatter and G. L. Seever : The disc algebra is not an existance subspace of its bidual, J. Math. Anal. and Appl. 44 (1973) 88 − 91.

[3] P. C. Curtis : N- parameter families and best approximation, Pacific J. Math. 9 (1959) 1013 − 1027.

[4] I. Glicksberg : Some uncomplemented function algebras, Trans A. M. S. 111 (1964) 121−137.

[5] A. Haar : Die Minkowskische Geometrie und die Annäberung on stetige Funktionen, Math. Ann. 78 (1918) 294 − 311.

[6] A. F. Hallstrom : Some spaces where best uniform approximation always falls, Approximation Theory, Proc. Internat. Sympos Univ. Texas, Austin Tex 1973, Academic Press, 1973, 369- 371.

[7] W. Hintzman : Best uniform approximations via annihilating measures, Bull. A.M.S., 76 (1970) 1062-1066.

[8] ———— : On the existence of best approximations, Approximation Theory, Proc. Internat. Sympos. Univ. Texas, Austin, Tex 1973, 379-381.

[9] K. Hoffman : Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall 1962.

[10] B.R. Kripke and R.B. Holmes : Approximation of bounded functions by continuous functions, Bull. A.M.S., 71 (1965) 896-897.

[11] J.C. Mairhuber : On Haar's theorem concerning Chebyshev approximation problems having unique solutions, Proc. A.M.S. 7 (1956) 609-615.

[12] R.R. Phelps : Uniqueness of Hahn-Banach extensions and unique best approximation, Trans A.M.S., 95 (1960) 238-255.

[13] W. Rudin : Projections on invariant subspaces, Proc. A.M.S., 13 (1962) 429-432.

[14] 和田淳蔵 : Banach空間における最良近似, 早大「学術研究」(近刊).