数理解析研究所講究録
第266巻 1976年 319-329

b函数論における，2，3の話題

京大 理　矢野 環

当原稿においては，prehomogeneous vector space
$(G, V) = SL(5) \times GL(4)$ の，いくつかの orbit における，
$\quad\;$ 日 $\otimes$ □
localization についてのべる。予稿集においてのべたいくつかの話題は，いくつかの論文にまとめられる。[ ][*] (G, V) の orbit ③' が，$u^4 + x_2u^2 + x_3u + x_4 = 0$ の判別式にすぎず，又，5次，6次，7次の判別式も simple であることが判明した以後，orbit ④' がまさに5次式の判別式であることが佐藤一関口により確認された。佐藤は又，一般に，n次式の判別式は simple，しかも，すべての stratum が simple holonomic set であることを示した。これは，一般に，Coxeter 群の基本反不変式に由来するものが，simple であることの一例として一般化された[ ][**].

* On the b-functions. , b函数の理論（岩波「数学」） etc.

** Microlocal structure of polynomials associated to Coxeter groups

/

付録　矢野環，関口次郎

$\underset{\text{日}}{SL(5)} \times \underset{\text{口}}{GL(4)}$　のいくつかの orbit における，
$\otimes$

localization の一覧表をここに示す.

表現空間を　$V = \sum_{j=6}^{9} V^5_{\text{日}} \otimes u_j$　，$V^5 = \sum_{j=1}^{5} \mathbb{C}u_j$　，$V^5_{\text{日}} = \sum \mathbb{C}u_i \wedge u_j$.

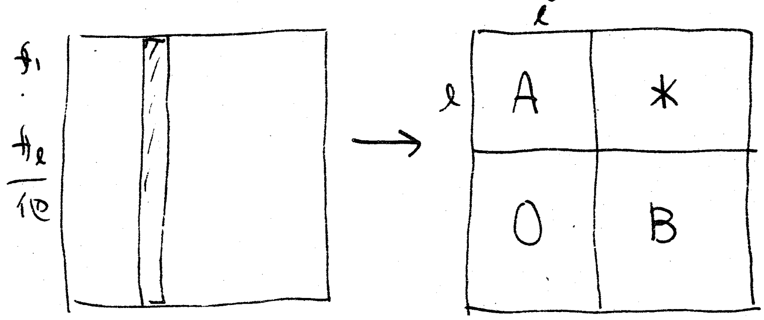
ととり　$(u_i \wedge u_j) \otimes u_k$　を　ijk　と略記する。

(4'')　は　5次式の判別式があらわれ，

(5'')　は　GL(2) の不変式に由来するが，判別式ではない。

これらの localization は，40 × 40 行列を，実際に基本変型を実行することによって，4×4 〜 8×8 行列にしたものである。一般に，codimension ℓ の orbit ℓ において，transversal な方向 $f_1, \cdots, f_\ell$ をとり，
generic point e_0

$e_0 + x_1 f_1 + \cdots + x_\ell f_\ell$　に対する $\mathfrak{g}$ の作用を 40×40 行列で表示し，



それを右のように変型すれば，(ただし $\det B \neq 0$) A が，ℓ における

もとめる $\mathfrak{g}$ の作用を表示している。

以下に示す Lie 環の basis は，すべて free basis である。

cf [ ].

(4'') 佐藤, 関口 文野.

generic pt. $256+247+357-348-158+149-239$.

conormal 136, $-126+137$, $146+236+127+138$, $2\cdot156-2\cdot346-147-237+128+139$

g. pt. $+ 13\otimes(x_2 9 + x_3 8 + x_4 7 - x_5 6)$

$f_{bor}(x_2, x_3, x_4, x_5) =$ <u>discriminant</u> of $u^5+x_2u^3+x_3u^2+x_4u+x_5$

X_0	X_1	X_2	X_3
$2x_2$	$3x_3$	$4x_4$	$5x_5$
$3x_3$	$4x_4-\frac{6}{5}x_2^2$	$5x_5-\frac{4}{5}x_2x_3$	$-\frac{2}{5}x_2x_4$
$4x_4$	$5x_5-\frac{4}{5}x_2x_3$	$2x_2x_4-\frac{6}{5}x_3^2$	$3x_2x_5-\frac{3}{5}x_3x_4$
$5x_5$	$-\frac{2}{5}x_2x_4$	$3x_2x_5-\frac{3}{5}x_3x_4$	$2x_3x_5-\frac{4}{5}x_4^2$

尚, X_0 はもとの $SL(5)\times GL(4)$ の Lie 環の元の

$E_{44}+2E_{22}+3E_{33}+4E_{11}-(2E_{66}+3E_{77}+4E_{88}+5E_{99})$

に対応している。 $[X_0,\ ]$ は weight が出るのみ.

$$[X_1, X_2] = \frac{4}{5}x_3X_0 - \frac{4}{5}x_2X_1 + X_3$$

$$[X_1, X_3] = \frac{2}{5}x_4X_0 - \frac{2}{5}x_2X_2$$

$$[X_2, X_3] = -x_5X_0 + \frac{3}{5}x_4X_1 - \frac{3}{5}x_3X_2 + x_2X_3.$$

⑤‴ 矢野

generic pt. $356+137-457+258+348+149+239$

conormal $126,\ 246,\ 236-146+247,\ 256-346+248-2\cdot 127,$

$136+456+\frac{1}{2}(-147+237-249-3\cdot 128)$

gen. pt $+\ (x\cdot 13+y\cdot 25+z\cdot 23+u\cdot 12+v\cdot 24)\otimes 6$ ととれば,

$$f_{loc}=\det\begin{pmatrix} 2x & 2y & 4z & 5u & 6v \\ 3y & 3z-3x^2 & -20u-2xy & -4v+4xz-y^2 & 12xu+yz \\ 4z & -5u-2xy & 12v-4xz & -6xu & 4(z^2+4yu+2xv) \\ 5u & -v+xz & -6xu & yu & -uz \\ 6v & 3xu & 4(z^2+4uy+2xv) & -zu & -2\left(\begin{array}{l}10u^2-4zv-4x^2v \\ -xz^2-4xyu\end{array}\right) \end{pmatrix}$$

gen. pt $+\ (\frac{2}{3}x_2\cdot 13+x_3\cdot 25+\frac{4}{3}x_4\cdot 23-\frac{4}{3}x_5\cdot 12+8x_6\cdot 24)\otimes 6$ ととれば,

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ 2x_2 & 3x_3 & 4x_4 & 5x_5 & 6x_6 \\ 3x_3 & 4x_4-\frac{4}{3}x_2^2 & \frac{40}{3}x_5-\frac{2}{3}x_2x_3 & 16x_6+\frac{1}{2}x_3^2-\frac{16}{9}x_2x_4 & -\frac{8}{9}x_2x_5+\frac{1}{9}x_3x_4 \\ 4x_4 & 5x_5-x_2x_3 & 36x_6-\frac{4}{3}x_2x_4 & -2x_2x_5 & \frac{4}{9}x_4^2-\frac{4}{3}x_3x_5+\frac{8}{3}x_2x_6 \\ 5x_5 & 6x_6-\frac{2}{3}x_2x_4 & -2x_2x_5 & -\frac{1}{2}x_3x_5 & -\frac{1}{9}x_4x_5 \\ 6x_6 & -\frac{1}{3}x_2x_5 & \frac{4}{9}x_4^2-\frac{4}{3}x_3x_5+\frac{8}{3}x_2x_6 & -\frac{1}{9}x_4x_5 & +\frac{2}{27}\left(\begin{array}{l}-5x_5^2+12x_4x_6+4x_2^2x_6 \\ +\frac{1}{3}x_2x_4^2-x_2x_3x_5\end{array}\right) \end{array}$$

となり, ここで X_0, X_1 は 6 次式の dicriminant と共通である。

$\{X_0,\ \}$ は weight のみ出る.

$$[X_1, X_2] = -4X_3 - \frac{2}{3}x_2 X_1$$

$$[X_1, X_3] = -3X_4 + \frac{1}{3}x_2 X_2 - \frac{1}{2}x_3 X_1 + \frac{1}{3}x_4 X_0$$

$$[X_1, X_4] = \frac{1}{6}x_3 X_2 - \frac{1}{3}x_4 X_1 + \frac{1}{3}x_5 X_0$$

$$[X_2, X_3] = -\frac{2}{3}x_2 X_3 + \frac{2}{3}x_5 X_0$$

$$[X_2, X_4] = \frac{2}{9}x_4 X_2 - \frac{8}{9}x_5 X_1 + \frac{8}{3}x_6 X_0$$

$$[X_3, X_4] = -\frac{1}{9}x_4 X_3 + \frac{1}{9}x_5 X_2$$

discriminant の場合と，およそ異なっている。

$\mathfrak{g}[\Delta]$ は $X_0 - 30s$, X_1, $X_2 + \frac{4}{3}x_2 s$, $X_3 - x_3 s$, $X_4 - (2x_4 + \frac{8}{27}x_2^2)s$ で生成される。

6次式の discriminant の Lie 環の basis を $\mathring{X}_0\ \mathring{X}_1\ \mathring{X}_2\ \mathring{X}_3\ \mathring{X}_4$ として，上のものと差をとれば，$X_0 = \mathring{X}_0$，$X_1 = \mathring{X}_1$ に加え，著しい関係がある。即ち，$A = 30x_6 - \frac{10}{3}x_2 x_4 + \frac{3}{2}x_3^2$，$B = -5x_2 x_5 + x_3 x_4$，$C = -\frac{4}{3}x_2 x_6 - \frac{5}{6}x_3 x_5 + \frac{4}{9}x_4^2$ とおけば，（関口による指摘）

$D = -3x_3 x_6 + \frac{1}{3}x_4 x_5$

$$X_2 - \mathring{X}_2 = \left(\frac{25}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_2 x_3\right)D_3 + AD_4 + BD_5 + CD_6$$

$$X_3 - \mathring{X}_3 = \frac{1}{3}AD_3 + BD_4 + 3CD_5 + DD_6$$

$$X_4 - \mathring{X}_4 = \frac{1}{9}BD_3 + CD_4 + DD_5 + \left(-\frac{10}{9}x_4 x_6 + \frac{8}{27}x_2^2 x_6 + \frac{25}{54}x_5^2 - \frac{2}{27}x_2 x_3 x_5 + \frac{2}{81}x_2 x_4^2\right)D_6$$

これらの事情について，詳細は[ ]を参照せよ。

⑥′ 矢野

generic pt $356 + 137 + 158 + 248 + 149 + 239$

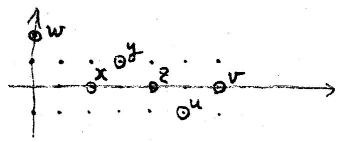
conormal $126,\ 256 - 127,\ 257,\ 157 - 247 - 259,\ 457,$

$258 + 249 - 159 - 2\cdot 237 + 2\cdot 147 - 3\cdot 456$

$$\text{gen.pt} + (x\cdot 23 + y\cdot 12 + z\cdot 24 + u\cdot 45 + v\cdot 25)\otimes 7 + w\cdot 126$$

X_{01}	X_{10}	X_{11}	X_{20}	X_{3-1}	X_{40}
$2x$		$2y$	$2z$	$5u$	$6v$
$3y$	y	$3w(z-x^2)$	$-xy-10uw$	$-4v+4xz$	$12xuw+yz$
$4z$		$-5uw-2xy$	$6v-2xz$	$-6ux$	$4(z^2+4uy+2xv)$
$5u$	$-u$	$-v+xz$	$-3xu$		$-uz$
$6v$		$3xuw$	$2(z^2+4uy+2xv)$	$-uz$	$-2\begin{pmatrix}10u^2w-4vz-4x^2v\\-xz^2-4xyu\end{pmatrix}$
	$2w$			$2y$	

2重の weight をもつ, diagram は



$$[X_{11}, X_{20}] = -y X_{10} - 2x X_{11} + 4w X_{3-1}$$

$$[X_{11}, X_{3-1}] = -\frac{1}{2} z X_{01} + 3(z-x^2) X_{10} - x X_{2,0} + \frac{1}{2} X_{4,0}$$

$$[X_{11}, X_{40}] = -3uw X_{01} - 3z X_{11} + 2y X_{20}$$

$$[X_{20}, X_{3-1}] = u X_{01} - 10u X_{10} - x X_{3-1}$$

$$[X_{20}\ X_{40}] = 4v X_{01} + 8u X_{11} + 2z X_{20}$$

$$[X_{3-1}, X_{40}] = -12xu X_{10} + 2u X_{20} - z X_{3-1}$$

($w=1$ とすれば 全く ⑤″ と同じである)

6'''' 矢野

generic pt. 136 + 147 + 158 + 237 + 248 + 259

conormal 456, 457−356, 458+346−357, 459+347−358, 348−359, 349.

gen. pt + $(x_0 45 + x_1 35)\otimes 6 + 34 \otimes (x_2 6 - x_3 7 + x_4 8 - x_5 9)$

X_{-1}	X_0'	X_0	X_1	X_2	X_3
	$5x_0$		x_1	$2x_0x_1$	
$5x_0$	$4x_1$	x_1	$2x_2$	$3x_0x_3+x_1x_2$	$4x_0x_4$
$4x_1$	$3x_2$	$2x_2$	$3x_3$	$4x_0x_4+2x_1x_3$	$3x_1x_4+5x_0x_5$
$3x_2$	$2x_3$	$3x_3$	$4x_4$	$5x_0x_5+3x_1x_4$	$2x_2x_4+4x_1x_5$
$2x_3$	x_4	$4x_4$	$5x_5$	$4x_1x_5$	$x_3x_4+3x_2x_5$
x_4		$5x_5$			$2x_3x_5$.

GL(2) より.

f_{loc} = discriminant of $x_0u^5+x_1u^4+x_2u^3+x_3u^2+x_4u+x_5$.

$[X_0, X_\nu] = \nu X_\nu$ $\qquad [X_0', X_\nu] = X_{-1},\ -X_1,\ 3X_2,\ 2X_3 \quad (\nu = -1,\ 1,\ 2,\ 3)$

$[X_0, X_0'] = 0$

$[X_1, X_2] = X_3 + x_2X_1 - \frac{2}{5}x_3X_0 + \frac{3}{5}x_3X_0'$

$[X_1, X_3] = -\frac{6}{5}x_4X_0 - \frac{4}{5}x_4X_0' + 2x_5X_{-1}$

$[X_{-1}, X_2] = 2x_0X_1 - \frac{4}{5}x_1X_0 + \frac{6}{5}x_1X_0'$

$[X_{-1}, X_3] = X_2 + \frac{3}{5}x_2X_0 - \frac{2}{5}x_2X_0' + x_3X_{-1}$

$[X_2, X_3] =$

7″ 関口 矢野

generic pt $356+137+128+458+149+239$

conormal $246, 247, 257, 157-259, 256-127+457, 236-248+347-146$

$2\cdot 456-2\cdot 126-147+237-249$

gen. pt $+ \ (x_{20}15+x_{11}23+x_{22}24+x_{31}25+x_{01}34+x_{21}45)\otimes 7+x_{12}246$

$X_{00}^{(1)}$	$X_{00}^{(2)}$	X_{10}	X_{01}	$X_{11}^{(1)}$	$X_{11}^{(2)}$	X_{21}
	$2x_{20}$		$x_{21}+x_{20}x_{01}$	$x_{31}-x_{20}x_{11}$	$-x_{31}+x_{20}x_{11}$	$2x_{20}x_{21}$
x_{01}		$\frac{1}{2}x_{11}$		$-3x_{12}$	$-(2x_{12}+\frac{1}{2}x_{11}x_{01})$	$-(2x_{22}+\frac{1}{2}x_{11}^2+2x_{01}x_{21})$
x_{11}	x_{11}	$3x_{21}+\frac{5}{2}x_{20}x_{01}$	$5x_{12}$	$-2x_{22}$	$-(2x_{22}+\frac{1}{2}x_{01}x_{21})$	$\frac{3}{2}x_{31}x_{01}+7x_{12}x_{20}$
x_{21}	$2x_{21}$	$\frac{5}{2}x_{31}-3x_{20}x_{11}$	$2x_{22}$	$5x_{12}x_{20}$	$2x_{12}x_{20}+x_{11}x_{21}+\frac{1}{2}x_{31}x_{01}$	$4x_{20}x_{22}+\frac{1}{2}x_{11}x_{31}$
x_{31}	$3x_{31}$	$\frac{1}{2}x_{20}x_{21}$	$3x_{12}x_{20}$		$\frac{1}{2}x_{21}^2-2x_{22}x_{20}$	$\frac{1}{2}x_{31}x_{21}+5x_{12}x_{20}^2$
$2x_{12}$	x_{12}	x_{22}	$-2x_{12}x_{01}$	$2x_{12}x_{11}$	$x_{12}x_{11}$	
$2x_{22}$	$2x_{22}$	$-\begin{pmatrix}2x_{31}x_{01}+x_{12}x_{20}\\+2x_{11}x_{21}\end{pmatrix}$	$-3\begin{pmatrix}x_{12}x_{11}\\+x_{01}x_{22}\end{pmatrix}$	$3x_{12}x_{21}+x_{11}x_{22}$	$\begin{pmatrix}x_{11}x_{22}+\frac{5}{2}x_{12}x_{21}\\+\frac{1}{2}x_{12}x_{20}x_{01}\end{pmatrix}$	$\frac{5}{2}x_{12}x_{31}-\frac{11}{2}x_{12}x_{20}x_{11}$

$X_{00}^{(1)}$ は添字第2の weight を示し、$X_{00}^{(2)}$ は第1のものを示す.

$\mathfrak{g}[s]$ は $X_{00}^{(1)}-12s$, $X_{00}^{(2)}-16s$, X_{10}, $X_{01}+2x_{01}s$, $X_{11}^{(1)}-2x_{11}s$,

$X_{11}^{(2)}-4x_{11}s$, $X_{21}+2x_{21}s$ で生成される。

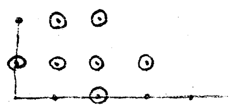
principal symbol は $\xi_{20}^{-8s-\frac{11}{2}}\xi_{01}^{-12s-8}\sqrt{d\xi}$ であり,

$b(s)$ の factor $s+\frac{2}{3}$ (これは Lie 環から知られていないもの)

に対する固有函数は, $D_{20}^{-\frac{1}{6}}\delta(x)$ である.

	$X_{00}^{(1)}$	$X_{00}^{(2)}$	X_{10}	X_{01}	$X_{11}^{(1)}$	$X_{11}^{(2)}$	X_{21}
$[X_{10}, X_{01}] =$			$-x_{01}$		$\frac{3}{2}$	-1	
$[X_{10}, X_{11}^{(1)}] =$	$2x_{21}$	$-x_{21}$	x_{11}	$-\frac{5}{2}x_{20}$			1
$[X_{10}, X_{11}^{(2)}] =$	$-\frac{1}{4}(x_{21}+x_{01}x_{20})$	$x_{21}+\frac{3}{2}x_{01}x_{20}$		$-\frac{1}{2}x_{20}$			$\frac{1}{2}$
$[X_{10}, X_{21}] =$	$-\frac{7}{4}x_{31}+\frac{11}{4}x_{20}x_{11}$	$x_{31}-\frac{3}{2}x_{20}x_{11}$			$\frac{3}{2}x_{20}$	$-\frac{3}{2}x_{20}$	
$[X_{01}, X_{11}^{(1)}] =$	$3x_{12}$	$-2x_{12}$		$-x_{11}$	$-x_{01}$		
$[X_{01}, X_{11}^{(2)}] =$		x_{12}			$-\frac{1}{2}x_{01}$		
$[X_{01}, X_{21}] =$	$-2x_{22}X_{00}^{(1)}$	x_{22}	$-x_{12}$	$2x_{21}$	$-\frac{1}{2}x_{11}$		
$[X_{11}^{(1)}, X_{11}^{(2)}] =$	$2x_{22}$	$-x_{22}$	x_{12}	$-\frac{1}{2}x_{21}$			
$[X_{11}^{(1)}, X_{21}] =$	$\frac{9}{4}x_{31}x_{01}-10x_{12}x_{20}-\frac{11}{4}x_{20}x_{01}x_{11}$	$6x_{12}x_{20}+\frac{3}{2}x_{20}x_{11}x_{01}-x_{31}x_{01}$		$\frac{3}{2}x_{31}$	$-\frac{3}{2}x_{01}x_{20}$	$\frac{3}{2}x_{01}x_{20}$	
$2[X_{11}^{(2)}, X_{21}] =$	$-\frac{11}{4}x_{31}x_{01}-8x_{12}x_{20}-\frac{1}{2}x_{11}x_{21}-\frac{1}{4}x_{20}x_{11}x_{01}$	$2x_{12}x_{20}+x_{31}x_{01}+\frac{3}{2}x_{20}x_{11}x_{01}$		$-2x_{31}+x_{20}x_{11}$	$-\frac{1}{2}x_{01}x_{20}$	$x_{21}+\frac{3}{2}x_{01}x_{20}$	x_{11}

weight の diagram は



であるが，Lie環の構造は上にみるようにかなり複雑である。

7''' 矢野

generic pt. 137 − 457 + 258 + 348 + 149 + 239

conormal

gen. pt + $\left(x_0 \cdot 35 + \frac{1}{3}x_1 \cdot 15 + \frac{2}{3}x_2 \cdot 13 + x_3 25 + \frac{4}{3}x_4 23 - \frac{4}{3}x_5 12 + 8x_6 24\right) \otimes 6$

X_{-1}	X_0'	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
	$6x_0$		x_1	$-\frac{1}{3}x_0x_2 - \frac{2}{9}x_1^2$	$\frac{1}{9}x_1x_2$	$\frac{1}{9}x_2^2 - \frac{1}{3}x_1x_3 + \frac{4}{3}x_0x_4$
$6x_0$	$5x_1$	x_1	$2x_2$	$-\frac{2}{3}x_1x_2$	$\frac{1}{2}x_1x_3$	$2x_0x_5$
$5x_1$	$4x_2$	$2x_2$	$3x_3$	$+x_0x_4 - x_1x_3$	$2x_1x_4 - 5x_0x_5$	$9x_0x_6 - \frac{2}{3}x_1x_5$
$4x_2$	$3x_3$	$3x_3$	$4x_4$	$\frac{10}{3}x_0x_5 - \frac{10}{9}x_1x_4$	$\frac{4}{9}x_1x_5 - 16x_0x_6 + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{16}{9}x_2x_4$	$\frac{10}{3}x_1x_6 - \frac{10}{9}x_2x_5$
$3x_3$	$2x_4$	$4x_4$	$5x_5$	$9x_0x_6 - \frac{2}{3}x_1x_5$	$-5x_1x_6 + 2x_2x_5$	$x_2x_6 - x_3x_5$
$2x_4$	x_5	$5x_5$	$6x_6$	$2x_1x_6$	$\frac{1}{2}x_3x_5$	$-\frac{2}{3}x_4x_5$
x_5		$6x_6$		$\frac{1}{9}x_4^2 - \frac{1}{3}x_3x_5 + \frac{4}{3}x_2x_6$	$\frac{1}{9}x_4x_5$	$-\frac{1}{3}x_4x_6 - \frac{2}{9}x_5^2$

GL(2) より.

$f_{loc}(x)$ は上の 7×7 行列の determinant であり、GL(2) の invariant になっている。10次式, weight 30.

上記 X_2 と X_4 又 X_3 自身は $x_\nu \to x_{6-\nu}$ でうつりかわるよう対称性をもたせてあるが、他に reasonable なとり方があるかもしれない。

⑧ 矢野 関口.

generic pt. $256+347-158+149$

unnormal $238,\ 239,\ 236+138,\ 237+129,\ 248,\ 359,\ 136,\ 127$

$$\text{gen. pt} + x_{5000}\,136 - x_{0500}\,248 - x_{0050}\,359 + x_{0005}\,127 +$$
$$+ x_{4321}\,138 + x_{3642}\,238 + x_{2463}\,239 + x_{1234}\,129.$$

$X_0^{(1)}$	$X_0^{(2)}$	$X_0^{(3)}$	$X_0^{(4)}$	X_{-1321}	X_{3142}	X_{2413}	$X_{1\,3-1}$
$5x_{5000}$				x_{4321}			
	$5x_{0500}$				x_{3642}		
		$5x_{0050}$				x_{2463}	
			$5x_{0005}$				x_{1234}
$4x_{4321}$	$3x_{4321}$	$2x_{4321}$	x_{4321}	$2x_{3642}$	$3x_{5000}x_{2463}$	$4x_{5000}x_{0500}x_{1234}$	$5x_{5000}x_{0500}x_{0050}$
$3x_{3642}$	$6x_{3642}$	$4x_{3642}$	$2x_{3642}$	$3x_{0500}x_{2463}$	$2x_{4321}x_{2463} + 4x_{5000}x_{0500}x_{0050}x_{1234}$	$3x_{0500}x_{4321}x_{1234} + 5x_{5000}x_{0500}^2x_{0050}x_{0005}$	$4x_{0500}x_{0050}x_{4321}$
$2x_{2463}$	$4x_{2463}$	$6x_{2463}$	$3x_{2463}$	$4x_{0500}x_{0050}x_{1234}$	$3x_{0050}x_{4321}x_{1234} + 5x_{5000}x_{0500}x_{0050}^2x_{0005}$	$4x_{0500}x_{0050}x_{0005}x_{4321} + 2x_{3642}x_{1234}$	$3x_{0050}x_{3642}$
x_{1234}	$2x_{1234}$	$3x_{1234}$	$4x_{1234}$	$5x_{0500}x_{0050}x_{0005}$	$4x_{0050}x_{0005}x_{4321}$	$3x_{0005}x_{3642}$	$2x_{2463}$

$$[X_{-1321}, X_{3142}] = \frac{1}{5}x_{2463}\left(-3X_0^{(1)} + 3X_0^{(2)} - X_0^{(3)}\right) + x_{0050}X_{2413}$$

$$[X_{-1321}, X_{2413}] = \frac{1}{5}x_{0500}x_{1234}\left(-4X_0^{(1)} + 4X_0^{(3)} - 2X_0^{(4)}\right) + 2x_{0500}x_{0005}X_{123-1}$$

$$[X_{-1321}, X_{123-1}] = x_{0500}x_{0050}\left(-X_0^{(1)} + X_0^{(4)}\right)$$

$$[X_{3142}, X_{2413}] = \frac{1}{5}x_{1234}x_{4321}\left(X_0^{(1)} - 3X_0^{(2)} + 3X_0^{(3)} - X_0^{(4)}\right)$$
$$+ x_{5000}x_{0500}x_{0050}x_{0005}\left(-X_0^{(2)} + X_0^{(3)}\right) - x_{5000}x_{1234}X_{-1321} + x_{0005}x_{4321}X_{123-1}$$

他は対称性から従う.