数理解析研究所講究録
第271巻 1976年 1-6

Multiplicative operations in BP cohomology

大阪市大 理 荒木捷朗

BPコホモロジーにおける乗法的コホモロジー作用素の性質を研究する．§1においてすべての乗法的コホモロジー作用素は$BP^*(\ )$の自己同型になることを示す．従って，乗法的作用素全体を$\mathrm{Mult}(BP)$，$BP^*(\ )$の自己同型群を$\mathrm{Aut}(BP)$とあらわすとき，

<u>定理1</u>. $\mathrm{Mult}(BP) = \mathrm{Aut}(BP)$.

§2で乗法的コホモロジー作用素の中で特に重要なAdams作用素を定義し，§3で次の定理を証明する．

<u>定理2</u>. $\mathrm{Ad}(BP) = Z(\mathrm{Aut}(BP))$. 但し$\mathrm{Ad}(BP)$はAdams作用素全体の作る$\mathrm{Aut}(BP)$の部分群を，$Z(\mathrm{Aut}(BP))$は$\mathrm{Aut}(BP)$の中心をあらわす．

§1. 乗法的作用素

$$\Theta_a : BP^*(\ ) \longrightarrow BP^*(\ )$$

に対して，

$$\Theta_a(e^{BP}(L)) = \phi_a^{-1}(e^{BP}(L))$$

とおくとき（Lは複素直線束，$e^{BP}(L)$はLのEuler類），ϕ_aはμ_{BP}上のtypical curveになり，一次の項の係数が1になる．従って

$$\phi_a(T) = \sum_{k\geq 0}^{\mu} a_k T^{p^k}, \quad a_k \in BP^{2-2p^k}(pt),$$

$a_0 = 1$，とあらわすことが出来る．BPコホモロジーの普遍性より，かくして得られた列

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots), \quad a_n \in BP^{2-2p^n}(pt),$$

とΘ_aとは1対1に対応する．そして

<u>命題 1</u>．$\Theta_a = \Theta_b \iff \Theta_a(pt) = \Theta_b(pt)$．

も容易に得られる．

$\mu_{BP}^{\phi_a} = \mu_a$とおき，$\mu_{BP}$と$\mu_a$上の$p$に対するFrobenius作用素を$f_p$，$f_p^a$として，

$$\phi_a \circ f_p^a \gamma_0 = f_p \phi_a$$

を二通りに計算する．$BP^*(pt)$のaugmentationのkernelをIとして，

$$\sum_{i\geq 1} \Theta_a(v_i) T^{p^{i-1}} \equiv \sum_{i\geq 1} (v_i + p a_i) T^{p^{i-1}} \mod I^2$$

が得られる．これより

$$\Theta_a(v_k) \equiv v_k \mod (p) + I^2$$

となる．（但し$(f_p \gamma_0)(T) = \sum_{i\geq 1}^{\mu} v_i T^{p^{i-1}}$，$BP^*(pt) = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots]$）．従って

$$\Theta_a(pt) : BP^*(pt) \cong BP^*(pt).$$

これより，一般コホモロジーの比較定理を用いて

$$\Theta_a \in \mathrm{Aut}(BP)$$

を得，定理1が証明される．

§2. 今後，BPコホモロジーの基礎環を $\mathbb{Z}_{(p)}$ から p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ にまで拡張して考える．J. Lubin, One-parameter formal Lie groups over $\mathfrak{p}$-adic integer rings, Ann. of Math., 80(1964), 464–484，の方法を拡張し，μ_{BP} の自己準同型

$$[\alpha]_{BP} \in \mathrm{End}(\mu_{BP})$$

が $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ に対して定義されることがわかる．

$$[\alpha]_{BP} = \alpha T + \text{higher terms},$$

$$[\alpha]_{BP} +^{\mu_{BP}} [\beta]_{BP} = [\alpha+\beta]_{BP},$$

$$[\alpha]_{BP} \circ [\beta]_{BP} = [\alpha\beta]_{BP}$$

の性質をもつ．

特に α が $\mathbb{Z}_p$ の単元のとき，

$$\gamma_\alpha(T) = [\alpha^{-1}]_{BP}(\alpha T)$$

とおくと，γ_α は μ_{BP} 上の typical curve になる．このcurveに対応する $BP^*(\ )$ の乗法的作用素を Ψ_α であらわし，BPコホモロジーのAdams作用素という．複素直線束 L に対し

$$\Psi^\alpha(e^{BP}(L)) = \alpha^{-1}[\alpha]_{BP}(e^{BP}(L))$$

となり，次の性質をもつ．

i) $\Psi^\alpha(pt)\mid BP^{-2s}(pt) = \alpha^s\cdot id.$

ii) $\Psi^\alpha\Psi^\beta = \Psi^{\alpha\beta} = \Psi^\beta\Psi^\alpha.$

これ等がAdams作用素とよばれるにふさわしい性質であることは，K理論のAdams作用素のもつ性質と比較すれば理解されるであろう．S.P. Novikov, The method of algebraic topology from the view point of cobordism theories, Izv. Akad. Nauk SSSR, 31 (1967), はUコボルディズムにおけるAdams作用素を定義しているが，Uコボルディズムをpで局所化してBPコホモロジーに分解するとき，NovikovのAdams作用素はこゝでのBPコホモロジーのAdams作用素になる．

命題1と上の性質 ii) より

iii) $\Psi^\alpha = \Psi^\beta \iff \alpha^{p-1} = \beta^{p-1}$

がわかる．BPコホモロジーのAdams作用素全体を $Ad(BP)$ とあらわす．$Ad(BP)$ は $Mult(BP)$ の部分群をなすが，iii) より

iv) $Ad(BP) \approx U_1(\mathbb{Z}_p)$

となることがわかる．但し，$U(\mathbb{Z}_p)$ を $\mathbb{Z}_p$ の単元の作る乗法群とするとき，$U_1(\mathbb{Z}_p)$ は

$$U_1(\mathbb{Z}_p) = \{\alpha \in \mathbb{Z}_p ;\ \alpha \equiv 1 \mod p\}$$

なる $U(\mathbb{Z}_p)$ の部分群である。

更に、BP コホモロジーにおける Landweber-Novikov-Quillen 作用素 r_E, $E=(e_1, e_2, \dots)$ との関係として

v) $$r_E \circ \Psi^\alpha = \alpha^{|E|}\,\Psi^\alpha \circ r_E$$

となることがわかり、i), v) より、2s 次の作用素

$$\Xi_s : BP^*(\ ) \longrightarrow BP^{*+2s}(\ )$$

に対して

vi) $$\Xi_s \circ \Psi^\alpha = \alpha^s\,\Psi^\alpha \circ \Xi_s,$$

なることがわかる。すべての乗法的作用素は0次であるから、vi) より特に

命題2. $Ad(BP) \subset Z(Mult(BP))$

が得られる。

§3. 命題2の逆の包含関係

$$Ad(BP) \supset Z(Mult(BP))$$

を示すことにより定理2を証明する。

$\Theta_a \in Z(Mult(BP))$, $a=(a_1, a_2, \dots)$, とする。
$b \in BP^{2(1-p^k)}(pt)$ に対し、列

$$(b, k) = (0, \dots, 0, b, 0, \dots)$$

を考えると、

i) $$\Theta_{(b,k)}(v_l) = v_l, \quad 1 \le l < k,$$

ii) $$\Theta_{(b,k)}(v_k) = v_k + pb$$

b

を得る．これと可換性

$$\Theta_{(b,k)}\circ\Theta_a = \Theta_a\circ\Theta_{(b,k)}$$

より，関係式

iii) $\qquad \Theta_{(b,k)}(a_k)+b = a_k+\Theta_a(b)$

を得る．

ここで，特に $b=v_k$ として

iv) $\qquad \Theta_a(v_k)=(1+p\lambda_k)v_k,\quad \lambda_k\in\mathbb{Z}_p,\quad k\geq 1,$

を得，又 $b = v_k + v_1^{(p^k-1)/(p-1)}$ として

v) $\qquad 1+p\lambda_k = (1+p\lambda_1)^{(p^k-1)/(p-1)}$

を得る．従って $\lambda\in U(\mathbb{Z}_p)$ を

$$\lambda^{p-1}=1+p\lambda_1$$

となるように選ぶと，§2 の Adams 作用素の性質 i) より

$$\Theta_a(pt)=\Psi^{\lambda}(pt)$$

となり，命題 1 より

$$\Theta_a=\Psi^{\lambda}$$

となって定理 2 が証明された．

（以上）