数理解析研究所講究録
第 271 巻 1976 年 16-27

射影古典群の分類空間について

京大 教養 三村 護
京大 理 河野 明

序 G を compact, connected Lie group, BG をその分類空間, p を素数とする。$H^*(G;\mathbb{Z}_p)$ から $H^*(BG;\mathbb{Z}_p)$ を求める問題は, $H_*(G;\mathbb{Z})$ が p-torsion free の場合をのぞいて, 一般にむつかしいようである。

この報告では, $H^*(BPSp(2n+1);\mathbb{Z}_2)$ についての Kono [5] の結果と $H^*(BPU(4n+2);\mathbb{Z}_2)$, $H^*(BPO(4n+2);\mathbb{Z}_2)$ についての Kono-Mimura [7] の結果について述べる。これらの Lie groups では $\pi_1(G)$ が 2-torsion を持ち, 従って $H_*(G;\mathbb{Z})$ も 2-torsion を持つ。

方法としては, Baum-Browder の結果を利用して, Eilenberg-Moore spectral sequence の E_2-term を計算しこれが collapse することを示す。$H^*(BPSp(2n+1);\mathbb{Z}_2)$ に関する方法は [5] とは異なっている。

この報告では $\mathbb{Z}_p$ は標数 p の素体と位数 p の巡回群の両方を

表わす。

1. 射影古典群の cohomology

次の結果は Borel による。

<u>補題1・1</u> (Borel [3])

(1・1) $H^*(PSp(2n+1);Z_2) = Z_2[t]/(t^4)\otimes\Lambda(x_7, x_{11}, \cdots, x_{8n+3})$,

(1・2) $H^*(PU(4n+2);Z_2) = Z_2[t]/(t^4)\otimes\Lambda(x_5, x_7, \cdots, x_{8n+3})$,

(1・3) $H^*(PO(4n+2);Z_2) = \Delta(t, x_2, x_3, \cdots, x_{4n+1})$,

ただし $\deg x_i = i$ 　 $\deg t = 1$.

PG の定義とくわしい結果は Borel [3] を見よ。

<u>定義1・2</u> 　 $G(2n) = SU(2n)/\{\pm I_{2n}\}$ とおく

<u>定理1・3</u> (Baum-Browder [1])

補題1・1 の生成元を次の条件をみたすようにとれる。

(1・1) で 　 $\bar{\phi}(x_i) = \bar{\phi}(t) = 0$,

(1・2) で 　 $\bar{\phi}(t) = \bar{\phi}(x_{4j+1}) = 0$

$\bar{\phi}(x_{4j+3}) = x_{4j+1}\otimes t^2$ 　 $j = 1, 2, \cdots, 2n$,

(1・3) で 　 $\bar{\phi}(t) = \bar{\phi}(x_{2j}) = 0$

$\bar{\phi}(x_{2j+1}) = x_{2j}\otimes t$ 　 $j = 1, 2, \cdots 2n$,

ただし $\bar{\phi}$ は群の積から induce された reduced diagonal map.

2. $Sp(n)$ の有限部分群

$Sp(1)$ と絶対値1の四元数を同一視する。

定義2·1

$$L = \{ \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \} \subset Sp(1)$$

$$\widetilde{W}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \in Sp(n) ; \ \varepsilon_i = 1 \text{ or } -1 \right\},$$

$$\widetilde{V}(n) = \{ \alpha \cdot A ; \quad A \in \widetilde{W}(n), \alpha \in L \} \subset Sp(n).$$

補題2·2

(i) $\widetilde{W}(n)$ は $Sp(n)$ の従って $\widetilde{V}(n)$ の maximal dimensional elementary 2-group である。 $\widetilde{W}(n) \cong (\mathbb{Z}_2)^n$.

(ii) $\widetilde{V}(n)$ は extra-special 2-group [4] である。

補題2·3

$$H^*(B\widetilde{V}(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t_1, \cdots, t_{n+1}]/(r_2, r_3) \otimes \mathbb{Z}_2[e]$$

ここで $\deg t_i = 1$ $\deg r_i = i$, $\deg e = 4$ さらに r_2, r_3 は $\mathbb{Z}_2[t_1, \cdots t_{n+1}]$ の正則列 (regular sequence)

証明 $\#(\widetilde{V}(n)) = 2^{n+2}$, $\#(\widetilde{W}(n)) = 2^n$ に Quillen [10] の定理4·6 を使え。

3. $H^*(BPSp(2n+1);\ \mathbb{Z}_2)$

ここでは，$H^*(BPSp(2n+1);\mathbb{Z}_2)$を計算する。方法としては，Quillen の有限性定理を使う。より初等的な証明は Kono [5] にある。

<u>補題3.1</u> (Borel [2])

$H^*(BSp(n);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[q_1, \cdots q_n]$ $\deg q_i = 4i$,

$H^*(Sp(n);\mathbb{Z}) = \Lambda(x_3, x_7, \cdots, x_{4n-1})$ で x_{4i-1} は *universally transgressive with* $\tau(x_{4i-1}) = q_i$.

<u>定理3.2</u> (Quillen の有限性定理)

Gを compact Lie 群 Hをその閉部分群とする。kを可換体とするとき $H^*(BH;k)$ は finite $H^*(BG;k)$ module になる。

(cf. Quillen [12] §2)

X_i, Y_jを適当な deg をもつ変数とする。

$R = k[X_1, \cdots, X_n]$, $R' = k[Y_1, \cdots, Y_{n+h}]/(r_1, \cdots, r_h)$

を graded ring とし，$r_1, \cdots, r_h$ はこの意味で homogeneous な元からなる $k[Y_1, \cdots, Y_{n+h}]$の正則列 (Quillen [10] §1) とする。$f: R \to R'$ を deg を保つ ring homomorphism とする。

<u>補題3.3</u>　上の条件の下で

R' は finite R-module $\Longleftrightarrow$ $f(x_1), \cdots, f(x_n)$ が R' の正則列.

<u>注意3.4</u>　補題3.3の条件下で，R' は free R-module

これらの事実の証明には R, R' が Cohen-Macaulay ring であることを利用する（Nagata [9], Quillen [10]）

<u>定義3.5</u>　$F_n = Sp(n)/\tilde{V}(n)$ とおく。

<u>注意3.6</u>　F_1 は Briskorn variety $V(2,3,3) \cap S_\varepsilon$ になる。（cf Milnor [8]　P80）

<u>定理3.7</u>　fibering $F_n \xrightarrow{j} B\tilde{V}(n) \xrightarrow{i} BSp(n)$ に関する Serre のスペクトル列は collapse する（[14]）。

（証明）定理3.2と補題3.3より $i^*(q_1), \cdots i^*(q_n)$ は正則列になる。fibering $Sp(n) \to F_n \longrightarrow B\tilde{V}(n)$ に関する Serre のスペクトル列 $(E_r^{p,q})$ で各 x_{4i-1} は transgressive で $\tau(x_{4i-1}) = i^*(q_i)$。よって $E_\infty^{p,q} = 0$ if $q \neq 0$. 従って j^* は onto. よって定理が証明された。Q.E.D.

系3.8　$H^*(F_n;\mathbb{Z}_2)\cong H^*(B\tilde{V}(n);\mathbb{Z}_2)/(\mathrm{Im}\, i^{*+})$

従って　$P.S.(F_n)=(1-t^2)(1-t^3)(1-t^8)(1-t^{12})\cdots(1-t^{4n})/(1-t)^{n+1}$.

定理3.9（Rothenberg – Steenrod [13]）

Gをcompactly generated associative H-spaceとする。
この時　次の条件をみたすスペクトル列が存在する。

$E_2=\mathrm{Cotor}^{H^*(G;k)}(k,k)$　　　$E_\infty=\mathcal{G}r(H^*(BG;k))$.

注意3.10　上のスペクトル列は，最初 Eilenberg – Mooreによって代数的に構成された。以下では，Eilenberg – Mooreのスペクトル列と呼ぶ。

補題3.11　$\mathrm{Cotor}^{H^*(PSp(2n+1);\mathbb{Z}_2)}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[\bar{y}_2,\bar{y}_3,\bar{y}_8,\bar{y}_{12},\cdots\bar{y}_{8n+4}]$

補題3.12　$H^*(BV(n);\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2[\mu_1,\cdots,\mu_{n+1}]$　$\deg\mu_i=1$

（　$V(n)=\tilde{V}(n)/\{\pm I_n\}\cong(\mathbb{Z}_2)^{n+1}$　）

定理3.13

$G=PSp(2n+1)$,　$k=\mathbb{Z}_2$　のとき，Eilenberg – Mooreのスペクトル列はcollapseする。　従って

$H^*(BPSp(2n+1);\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[y_2,y_3,y_8,y_{12},\cdots,y_{8n+4}]$

ここで　$\tau(t)=y_2$,　$\tau(t^2)=y_3$,　$\tau(x_{4i-1})=y_{4i}$.

(証明)
$$\begin{tikzcd}
 & B\tilde{V}(2n+1) \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & BSp(2n+1) \arrow[d] \\
\Gamma_{2n+1} \arrow[ur] \arrow[r] & BV(2n+1) \arrow[r, "\iota"] & BPSp(2n+1)
\end{tikzcd}$$

の下の fibering に関する Serre のスペクトル列より

$$P.S.(BPSp(2n+1)) \gg \{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^8)(1-t^{12})\cdots(1-t^{8n+4})\}^{-1}$$

ここで $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, $\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i \in \mathbb{Z}[[t]]$, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \ll \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ とは,
$\forall i \geq 0$ に対して $a_i \leq b_i$

一方 Eilenberg－Moore のスペクトル列より

$$P.S.(BPSp(2n+1)) \ll \{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^8)(1-t^{12})\cdots(1-t^{8n+4})\}^{-1}.$$

よって上の2つのスペクトル列は どちらも collapse する。
下の結果は標準的な議論による。　　Q.E.D.

<u>系3.14</u>　ι: $BV(2n+1) \longrightarrow BPSp(2n+1)$ とする。

(i)　ι^*: $H^*(BPSp(2n+1);\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^*(BV(2n+1);\mathbb{Z}_2)$ injective

(ii)　$V(2n+1)$は $PSp(2n+1)$の maximal dimensional elementary 2－group である。

<u>注意3.15</u>　Quillen [11] に従えば, "$V(2n+1)$ は $PSp(2n+1)$ の mod 2 cohomology を detect する" と言える。より一般な議論は Kono [6] を見よ。

4、 $H^*(BPU(4n+2);\mathbb{Z}_2)$ と $H^*(BPO(4n+2);\mathbb{Z}_2)$

ここでは，Kono−Mimura [7] の結果を紹介する。 証明はこの論文を見られたい。

s が odd の時 $H^*(PU(2s);\mathbb{Z}_2) \cong H^*(G(2s);\mathbb{Z}_2)$, $H^*(BPU(2s);\mathbb{Z}_2) \cong H^*(BG(2s);\mathbb{Z}_2)$ 故 $H^*(BG(2s);\mathbb{Z}_2)$ を調べる。

$A = H^*(PU(4n+2);\mathbb{Z}_2) = H^*(G(4n+2);\mathbb{Z}_2)$ とおく。

<u>定理4.1</u> $\mathrm{Cotor}^A(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[a_2, a_3, y(I), x_{8l+8}]/I$

ここに I は $a_3 y(I)$, と他の homogeneous element で生成される ideal である。 $\deg y(I)$, $\deg x_{8l+8}$ は even.

くわしくは [7]を見よ。 計算には Shimada−Iwai [15] の方法を用いる。

<u>定理4.2</u> $G = PU(4n+2)$ $(G(4n+2))$, $k = \mathbb{Z}_2$ の時 Eilenberg-Moore のスペクトル列は collapse する。

<u>系4.3</u> $\mathbb{Z}_2$ 上の module として

$$H^*(BPU(4n+2);\mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Cotor}^A(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)$$

証明には次の inclusion とスペクトル列の自然性を使う。

$$\begin{tikzcd} Sp(2n+1) \arrow[r, "\tilde{\psi}"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & SU(4n+2) \arrow[d] \\ PSp(2n+1) \arrow[r, "\bar{\psi}"] & G(4n+2) \end{tikzcd}$$

ここで $\tilde{\psi}$ は $\mathbb{H} \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$ で導かれる inclusion である。

a_3 以外の生成元がすべて even deg であることに注意せよ。

対応する $PO(4n+2)$ の結果は，

<u>定理4.2′</u>　$G = PO(4n+2)$, $k = \mathbb{Z}_2$ の時 Eilenberg–Moore のスペクトル列は collapse する。

<u>系4.3′</u>　$\mathbb{Z}_2$ 上の module として

$$H^*(BPO(4n+2);\mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Cotor}^{H^*(PO(4n+2);\mathbb{Z}_2)}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2).$$

参　考　文　献

[1] P. F. Baum – W. Browder: The cohomology of quotients of classical groups, Topology 3 (1965), 303 – 336.

[2] A. Borel: Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compacts, Ann. of. Math., 57 (1953), 115 – 207.

[3] A. Borel; Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes, Amer. J. Math., 80 (1954), 273 – 342.

[4] D. Gorenstein: Finite Groups, New York, Harper and Row 1968

[5] A. Kono; On cohomology mod 2 of the classifing spaces of non-simply connected classical Lie groups (to appear).

[6] A. Kono; Cohomology of finite groups and classifing spaces of compact Lie groups (to appear).

[7] A. Kono – M. Mimura; On the cohomology of the classifing

spaces of PSU(4n+2) and PO(4n+2) (to appear).

[8] J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Studies 61, Princeton.

[9] M. Nagata: Local rings, Interscience Publ. (1962).

[10] D. Quillen: The mod 2 cohomology rings of extra-special 2-groups and Spinor groups, Math. Ann., 194 (1971), 197-212.

[11] D. Quillen: The Adams conjecture, Topology 10 66-80.

[12] D. Quillen: The spectrum of an equivariant cohomology ring: I, Ann. of Math., 94 (1971), 549-572.

[13] M. Rothenberg - N. E. Steenrod: The cohomology of classifying spaces of H-spaces, Bull. of A. M. S., 71 (1965), 872-875.

[14] J.-P. Serre: Homologie singulière des espaces fibrés, Ann. of Math., 54 (1951), 425-505.

[15] N. Shimada — A. Iwai; On the cohomology of some Hopf algebras, Nagoya Math. J. 30 (1967), 103–111.

[16] O. Zariski — P. Samuel; Commutative algebra, I, II, Van-Nostrand (1960).