数理解析研究所講究録
第271巻 1976年 54-60

Loop-orderについて

阪大 教養　野村泰敏

位相空間Xの閉道空間をΩXとする。ホモトピー集合$[\Omega X, \Omega X]$における恒等写像のホモトピー類$1_{\Omega X}$の位数をXのloop-orderと呼び$l(X)$で表わす。この概念は戸田氏のsuspension-orderの双対として菅原氏[3]によって導入され、そこでその一般的性質が論ぜられた。就中、ファイバー写像$F \to E \to B$に対しては$l(E) \mid l(B) \cdot l(F)$が示されている。ここでは、Eilenberg-MacLane複体よりポストニコフ構成で得られる2-stage及び3-stageの空間に対して愛知教育大の古川靖邦氏と共に得た結果について述べる。

1. 主結果

K_nをEilenberg-MacLane複体$K(Z_p, n)$(ただしpは素数)とする。mod pのSteenrod代数$\mathcal{A}(p)$の次元nの元αに対して、diagonal map ψによるαの像が

$$\psi(\alpha) = \alpha \otimes 1 + \alpha_1 \otimes \beta_1 + \cdots$$

とかかれるとき（ただし β_1 は $Z_p \to Z_{p^2} \to Z_p$ に対する Bockstein 作用素とする), $\tilde{\alpha} = (-1)^{n+1}\alpha_1$ とおく。〜は Kristensen derivation と呼ばれ $\widetilde{Sq^n} = Sq^{n-1}$ $(n \geqq 1)$, $\tilde{\beta}_1 = 1$, $\widetilde{P^i} = 0$ $(i \geqq 0)$ をみたす（cf. Larmore-Thomas [1], Smith [2]).

さて $\mathcal{A}(p)$ の元 θ_j, γ_i に対して

$$\{\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_l\} : K_n \to \mathop{\times}_{j=0}^{l} K_{n+r+r_j}, \quad r>0,\ 0=r_0 \leqq r_1 \leqq \cdots \leqq r_l,$$
$$n \geqq r + r_l + 3$$

$$\sum_{i=0}^{k} \pi_i^* \gamma_i : \mathop{\times}_{i=0}^{k} K_{n+s_i} \to K_{n+r}, \quad s_k < r,\ 0=s_0 \leqq s_1 \leqq \cdots \leqq s_k,$$
$$n \geqq r+3$$

により可縮な path-space から誘導されるファイバー空間を E_1, E_2 と記す。ここで π_i は第 i 因子への射影を表わす。

<u>定理 A</u>　$l(E_1) = p^2$ となる必要十分条件は，或る j に対して

$$\tilde{\theta}_j \notin \sum_{i=0}^{j-1} \mathcal{A}(p)\theta_i$$

<u>定理 B</u>　$l(E_2) = p^2$ となる必要十分条件は，或る i に対して

$$\tilde{\gamma}_i \notin \sum_{j=i+1}^{k} \gamma_j \mathcal{A}(p)$$

<u>系 1</u>　$\theta \in \mathcal{A}(p)$, $\deg\theta = r$, $r > 0$, $n \geqq r+3$ とする。θ のファイバー E の loop-order $l(E)$ が p^2 となるための条件は $\tilde{\theta} \neq 0$.

系 1 は L. Smith [2] の Theorem 1.3 と同等である。〜の核に属する $\mathcal{A}(2)$ の元としては $Sq(3k) + \sum_{i=1}^{k} Sq(3k-i, i)$ $(k \geqq 1)$, $Sq(6k+1) + Sq(6k, 1) + \sum_{i=1}^{k} Sq(6k+1-2i, 2i) + \sum_{j=2}^{2k} Sq(6k-j, j, 1)$ $(k \geqq 1)$ 等がある（ここで $Sq^{i_1}Sq^{i_2}\cdots Sq^{i_k}$ を $Sq(i_1, \cdots, i_k)$ と略記).

次に 3-stage ポストニコフ構成

$$
(*)\qquad
\begin{array}{ccccc}
\Omega L & \xrightarrow{j} & E & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\
\Omega B & \xrightarrow{l} & K & \xrightarrow{\theta} & L \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \\
 & & A & \xrightarrow{\alpha} & B
\end{array}
$$

$$A=K_n,\quad B=\mathop{\times}_{i=0}^{m} K_{n+r+r_i},\quad L=K_{n+s},\quad r>0,\quad n\geqq s+3,\quad s\geqq r+r_m$$

$$\alpha=\{\alpha_0,\cdots,\alpha_m\},\quad \alpha_i\in\mathfrak{A}(p),\quad \deg\alpha_i=r+r_i.$$

$$\beta=\theta l=\sum_{i=0}^{m}(\Omega\pi_i)^*\beta_i,\quad \beta_i\in\mathfrak{A}(p),\quad \deg\beta_i=s-r-r_i+1$$

$$r_0=0\leqq r_1\leqq\cdots\leqq r_m$$

K 及び E はそれぞれ α, θ のファイバー

を考える。関係 $\sum_{i=0}^{m}[\tilde{\beta}_i\cdot\alpha_i+(-1)^{s-r-r_i+1}\beta_i\cdot\tilde{\alpha}_i]=0$ に随伴する2次的作用素を

$$\psi:\bigcap_{i=0}^{m}(\mathrm{Ker}\,\alpha_i\cap\mathrm{Ker}\,\tilde{\alpha}_i)\to H^{n+s-2}(\ ;Z_p)/\mathcal{L}$$

$$\mathcal{L}=\sum_{i=0}^{m}[\beta_i\cdot H^{n+r+r_i-3}(\ ;Z_p)+\tilde{\beta}_i\cdot H^{n+r+r_i-2}(\ ;Z_p)]$$

と記す。

<u>定理 C</u>　1)　$\forall i,\ \tilde{\alpha}_i\in\sum_{k=0}^{i-1}\mathfrak{A}(p)\alpha_k,\ \exists j,\ \tilde{\beta}_j\notin\sum_{k=j+1}^{m}\beta_k\mathfrak{A}(p)$ ならば $l(E)=p^2$.

2)　$\forall i;\ \tilde{\alpha}_i\in\sum_{k=0}^{i-1}\mathfrak{A}(p)\alpha_k,\ \deg\beta_m>1$, かつ

$$\psi(\Omega\rho)\not\equiv 0 \mod \sum_{i=0}^{m}[\beta_i\cdot H^{n+r+r_i-3}(\Omega K;Z_p)+\tilde{\beta}_i\cdot H^{n+r+r_i-2}(\Omega K;Z_p)] + (\Omega\rho)^*H^{n+s-2}(\Omega A;Z_p)$$

ならば $l(E)=p^2$.

3) $\forall i,\ \tilde{\alpha}_i \in \sum_{k=0}^{i-1} \mathcal{A}(p)\alpha_k,\quad \forall j,\ \tilde{\beta}_j \in \sum_{k=j+1}^{m} \beta_k \mathcal{A}(p),\ \deg \beta_m > 1$

かつ
$$(\Omega\rho)^* H^{n+s-2}(\Omega A; Z_p) \subset \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot H^{n+r+r_i-3}(\Omega K; Z_p),$$
$$\psi(\Omega\rho) \equiv 0 \mod \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot H^{n+r+r_i-3}(\Omega K; Z_p)$$
ならば $l(E)=p$.

4) $\exists i,\ \tilde{\alpha}_i \notin \sum_{k=0}^{i-1} \mathcal{A}(p)\alpha_k,\ (\Omega\rho)^* H^{n+s-2}(\Omega A; Z_p) \subset \sum_{k=0}^{m} \beta_k H^{n+r+r_k-3}(\Omega K; Z_p)$ ならば $l(E)=p^2$.

<u>系2.</u> $\exists i,\ \tilde{\alpha}_i \notin \sum_{k=0}^{i-1} \mathcal{A}(p)\alpha_k$ かつ $\mathcal{A}(p)$ の次元 $s-1$ の部分が $\sum_{k=0}^{m}\beta_k \mathcal{A}(p) + \sum_{k=0}^{m} \mathcal{A}(p)\alpha_k$ に含まれるならば $l(E)=p^2$.

<u>系3</u> $\forall i,\ \tilde{\alpha}_i \in \sum_{k=0}^{i-1} \mathcal{A}(p)\alpha_k,\ \forall j,\ \tilde{\beta}_j \in \sum_{k=j+1}^{m} \beta_k \mathcal{A}(p)$, $\deg \beta_m > 1$ かつ $\mathcal{A}(p)$ の次元 $s-1$ の部分が $\sum_{k=0}^{m} \beta_k \mathcal{A}(p) + \sum_{k=0}^{m} \mathcal{A}(p)\alpha_k$ に含まれるならば $l(E)=p$ となるためには $\forall i$, $\mathcal{A}(p)$ の次元 $s-r-r_i$ の部分が 0 であることが十分である。

定理Cの1)の適用される関係としては $(P^k\Delta)P^{p-1}=0$ ($2 \le k < p$), $(P^p\Delta)P^k + (k-1)\Delta P^{p+k} - (\Delta P^{p+k-1})P^1 = 0$ ($1<k<p$) がある。系2の適用される関係としては $Sq^3Sq^1 + Sq^2Sq^2 = 0$, $Sq^8Sq^1 + (Sq^2Sq^3)Sq^4 + Sq^1Sq^8 = 0$ 等がある。系3の適用できる関係としては $P^{p-1}P^1=0$ ($p>3$), $P^pP^{p+2} - P^{2p+1}P^1 = 0$ が挙げられる。関係 $(\Delta P^{kp})P^{k-1} - P^{kp}(\Delta P^{k-1}) - (P^{kp-1})(\Delta P^k) = 0$ ($k \geqq 2$, $k \not\equiv 0 \mod p$, $p>3$) は定理C, 2)の適用できる例である。

尚，(*)での E は関係 $\beta(\Omega\alpha)=0$ より定まる2次的作用素の universal example のとり方 θ が種々あることから，そのホモトピー型や loop-order は関係 $\beta(\Omega\alpha)=0$ からは一意には定まらぬこともあり得ることに注意したい。

2. 定理の証明

$1_{\Omega X}$ の位数を決定するために次の様な Larmore-Thomas [1] の方法を用いる。$\pi: E\to K$ を $\theta: K\to L$ のファイバーとし，素数 p を固定する。degree p^k $(k>0)$ の $S=S^1$ の写像の Puppe 列を

$$S \xrightarrow{p^k} S \xrightarrow{i} P \xrightarrow{q} S^2 \xrightarrow{p^k} \cdots$$

とし，$j: \Omega L\to E$ を包含写像とすると図式

$$\begin{tikzcd}
 & & & & L^{S^2} \arrow[d, "p^{k\#}"] \\
 & & & K^{S^2} \arrow[r, "\theta^{S^2}"] \arrow[d, "q^\#"] & L^{S^2} \arrow[d, "q^\#"] \\
 & & & K^P \arrow[r, "\theta^P"] \arrow[d, "i^\#"] & L^P \arrow[d, "i^\#"] \\
 & \Omega L^S \arrow[r, "j^S"] \arrow[d, "p^{k\#}"] & E^S \arrow[r, "\pi^S"] \arrow[d, "p^{k\#}"] & K^S \arrow[r, "\theta^S"] \arrow[d, "p^{k\#}"] & L^S \\
\Omega K^S \arrow[r, "(\Omega\theta)^S"] & \Omega L^S \arrow[r, "j^S"] & E^S \arrow[r, "\pi^S"] & K^S &
\end{tikzcd}$$

が誘導される。行及び列はファイバー列となり，$\#$ は関数空間への誘導写像を表わしている。K 及び L を loop 空間と仮

定しておく。Larmore-Thomas [1] に随い，関数的作用素

$$\Phi_k : [X, K^S] \cap \mathrm{Ker}(p^{k\#})_* \cap \mathrm{Ker}\, \theta^S_*$$
$$\longrightarrow [X, L^{S^2}] / \theta^{S^2}_*[X, K^{S^2}] + (p^{k\#})_*[X, L^{S^2}]$$

を $\Phi_k = (q^\#)^{-1}_* \theta^P_* (i^\#)^{-1}_*$ と定義する。第1節の諸定理の証明の基礎となるのは次の定理である。

<u>定理</u>　次の条件を仮定する：

1)　$\ell(K) \mid p^k, \quad \ell(L) \mid p^k$

2)　$[\Omega L, \Omega^2 K] = 0, \quad [\Omega^2 L, \Omega^2 K] = 0, \quad [\Omega L, \Omega K] = 0$

3)　$Y = \Omega^2 L, \Omega^2 K, \Omega E$ に対して

$$[\Omega^2 L, Y] \xleftarrow{(\Omega j')^*} [\Omega E, Y] \xleftarrow{(\Omega\pi)^*} [\Omega K, Y] \xleftarrow{(\Omega\theta)^*} [\Omega L, Y]$$

が完全である。

このとき　$p^k 1_{\Omega E} = -(\Omega j')_* \Phi_k(\Omega\pi)$

で，$(\Omega\theta)^*[\Omega L, \Omega^2 L] + (\Omega^2\theta)_* [\Omega K, \Omega^2 K]$ を modulo として元 $\Psi_k(E) \in [\Omega K, \Omega^2 L]$ で，$\Phi_k(\Omega\pi) \equiv (\Omega\pi)^* \Psi_k(E) \mod (\Omega^2\theta)_* [\Omega E, \Omega^2 K]$ となるものが unique に定まり

$$p^k 1_{\Omega E} = 0 \iff \Psi_k(E) \equiv 0 \mod (\Omega^2\theta)_* [\Omega K, \Omega^2 K] + (\Omega\theta)^* [\Omega L, \Omega^2 L].$$

証明は diagram-chasing による。尚，対応

$$\theta \to \Psi_1(E)$$

は Toda 氏の derivative θ ([4], p.209) の双対に当ることを注意しておく。

第一節の諸定理を証明するためには，それぞれの場合に $\Phi_k(E)$ を，Kristensen derivation ～ や，関係

$$(t\beta^p)(\alpha^p e) = 0$$

より導かれる二次的作用素で表わすことに帰着される，ただし $t: L^p \to \Omega^2 L$ は $q^\#$ に対する射影で，$e: \Omega A \to A^p$ は $i^\#$ に対する injection である．詳細は［5］で発表の予定である．

文　献

[1] L. Larmore and E. Thomas: Group extensions and principal fibrations, Math. Scand. 30 (1972), 227–248.

[2] L. Smith: Secondary cohomology theories, Indiana Math. J. 23 (1974), 899–923.

[3] M. Sugawara: Order of the identity class of a loop space, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser A-1, 30 (1966), 131–136

[4] H. Toda, Algebra of stable homotopy of Z_p-spaces and applications, J. Math. Kyoto Univ. 11-2 (1971), 197–251.

[5] Y. Furukawa and Y. Nomura, On the loop order of a fibre space. 準備中.