数理解析研究所講究録
第278巻 1976年 23-34

連続接合積におけるフーリエ展開と相対可換子問題について

阪大 基礎工　　髙井博司

§1 序論　　冨田－竹崎理論から Connes－竹崎理論へと、III型ファクターの理論はこの数年間に著しい発展を遂げたが、特に竹崎による W^*－代数の接合積の双対定理によって、III型の W^*－代数はII型の W^*－代数の実数 $\mathbb{R}$ による連続接合積であることが II_1－ファクターと連続接合積の理論の進展を一層本質的なものにした。（[8]）　一方、Connes は半有限 W^*－代数の可換群による離散接合積では書けないIII型ファクターの例を作り、連続力学系の組織的研究が必要であることを示した。（[1]）しかし、離散接合積に比して連続接合積の研究は取り扱いが厄介である為に非常に立ち遅れている。例えば、接合積から元の代数への有界期待値が自動的に見つからないこと、元の代数の相対可換子代数が計算出来ないこと、接合積が C^*－代数を基にしている場合には、元の代数が接合積に埋め込めないこと、接合積の原始イデアルの成す空間が、

擬軌道空間に位相同型かどうか etc、離散型で成立する重要な結果が連続型の場合には未解決のままである。([6],[9])

これらの問題点は離散型の場合には、接合積の任意要素を元の代数に値をとる関数に表示する方法ーいわゆるフーリエ展開ーによって解決され得るのであるが、連続型の場合にはその適当な方法はまだ考えられていない。

そこで、本講演では、連続接合積におけるフーリエ展開を実数$\mathbb{R}$の作用について考え、合わせて相対可換子代数の様子をフーリエ展開を使ってながめてみるのが目的である。具体的には、連続W^*-力学系$(\mathcal{M},\mathbb{R},\alpha)$についてその接合積$\mathbb{R}\otimes_\alpha\mathcal{M}$の任意要素Tは或る一般化されたシュワルツ空間$\mathcal{S}_0(\mathbb{R};\mathfrak{z})$上のテンパード超関数$D^{\mathfrak{g}}T_\eta$により、

$$(*)\qquad \langle T\xi|\zeta\rangle = D^{\mathfrak{g}}T_\eta(\widetilde{\xi\zeta^b}\circ\pi_e)\qquad \xi,\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathcal{B}_\infty)$$

と表わされる。(*)を用いると、代数$\mathcal{M}$の接合積$\mathbb{R}\otimes_\alpha\mathcal{M}$における相対可換子代数$(\mathbb{R}\otimes_\alpha\mathcal{M})\cap\mathcal{M}'$を、$(\eta,\mathfrak{g})$を用いて表わすことが可能である。([7])

§2　連続接合積とフーリエ空間

$(\mathcal{M},G,\alpha)$を連続W^*-力学系とする。離散型と同様に、$\mathcal{M}$はσ-有限でG-有限とし、Gを可分なユニモジュラー群としておく。忠実なG-不変状態φに対して、極大冨田代数$\mathcal{B}$を一般

化されたヒルベルト代数$\mathfrak{a}_\varphi$の中で考える．$\mathfrak{a}_\varphi$の完備化$\mathfrak{H}$上に作用αから導入された群Gの強連続ユニタリ表現Uを作る．$\mathcal{B}$上のセミノルムP_K：

$$(2.1)\qquad P_K(\xi) = \sup_{z\in K}\{\|\pi_\ell(\Delta^z\xi)\| + \|\pi_r(\Delta^z\xi)\|\}$$

を考える．ただしKは複素数体$\mathbb{C}$のコンパクト集合である。$K(G;\mathcal{B})$で$(\mathcal{B},P_K)$に値をとるG上の連続関数でその台がコンパクトなもの全体とすると、

$$(2.2)\qquad \begin{cases} (\xi\eta)(g) = \int_G U_{h^{-1}}\,\xi(gh^{-1})\,\eta(h)\,dh \\ \xi^\#(g) = U_{g^{-1}}\,\xi(g^{-1})^\#, \qquad \xi^b(g) = U_{g^{-1}}\,\xi(g^{-1})^b \\ (\Delta^z\xi)(g) = \Delta^z\xi(g), \qquad (J\xi)(g) = J\,U_{g^{-1}}\,\xi(g^{-1}) \end{cases}$$

$(\xi,\eta\in K(G;\mathcal{B}),\ z\in\mathbb{C})$なる代数演算で冨田代数になる。その左$W^*$代数$\pi_\ell(K(G;\mathcal{B}))''$を連続力学系$(\mathcal{M},G,\alpha)$の接合積といい$G\otimes_\alpha\mathcal{M}$で表わす．$G\otimes_\alpha\mathcal{M}$は、

$$(\pi_\alpha(x)\xi)(h) = \alpha_h^{-1}(x)\,\xi(h)\ ,\quad (\lambda(g)\xi)(h) = \xi(g^{-1}h)$$

$(x\in\mathcal{M},\ g\in G,\ \xi\in L^2(G;\mathfrak{H}))$なる２つの生成要素$\pi_\alpha(x),\lambda(g)$を持っている。

いま、$\eta,\xi\in K(G;\mathcal{B})$に対して、$g\in G$を固定して、

$$(2.3)\qquad \widetilde{\eta\xi^b}(g)[x] = \langle \eta\xi^b(g^{-1}) \mid x^*\xi_0\rangle \qquad (x\in\mathcal{M})$$

とおくと、$\widetilde{\eta\xi^b}(g)\in\mathcal{M}_*$となり、(2.2)を使って、

$$(2.4)\qquad \widetilde{\eta\xi^b}(g)[x] = \langle \pi_\alpha(x)\lambda(g)\eta \mid \xi\rangle$$

となる。(2.3)により、$\widetilde{\eta\xi^b}$は、$\mathcal{M}_*$に値をとるノルムに関して

連続なG上の関数でその台がコンパクトなもの全体$K(G;\mathcal{M}_*)$に属する。$K(G;\mathcal{M}_*)$の$\sup$ノルム$\|\cdot\|_\infty$に関する完備化$C_0(G;\mathcal{M}_*)$は無限遠点で0になる$\mathcal{M}_*$に値をとるG上の連続関数全体である。$\eta,\xi\in K(G;\mathcal{B})$に対して、

(2.5) $$\|\eta\xi^b\|_1 = \sup\{|\langle\eta\xi^b|\xi\rangle| : \xi\in K(G;\mathcal{B}), \|\pi_\ell(\xi)\|\leqq 1\}$$

とおくと、

(2.6) $$\|\widehat{\eta\xi^b}\|_\infty \leqq \|\eta\xi^b\|_1 \qquad (\eta,\xi\in K(G;\mathcal{B}))$$

を得る。$\widehat{\eta\eta^b}$, $\eta\in K(G;\mathcal{B})$から作られるベクトル空間を、$F_0(G;\mathcal{M}_*)$とし、その上に、

(2.7) $$\|\Phi\|_* = \sup\left\{\left|\int_G \Phi(g)\circ\pi_\ell[U_g\xi(g)]\,dg\right| : \xi\in K(G;\mathcal{B}), \|\pi_\ell(\xi)\|\leqq 1\right\}$$

$(\Phi\in F_0(G;\mathcal{M}_*))$とおくと、$\|\cdot\|_*$はノルムになりその完備化を、$F_\alpha(G;\mathcal{M}_*)$とすると、(2.6)から$C_0(G;\mathcal{M}_*)$の部分空間となる。実際、

(2.8) $$\|\widehat{\eta\xi^b}\|_* = \|\eta\xi^b\|_1$$

となり、Phillipsの結果より([4]) $F_\alpha(G;\mathcal{M}_*)$は$(G\otimes_\alpha\mathcal{M})_*$に同型なバナッハ空間になる。$F_\alpha(G;\mathcal{M}_*)$のことを$(\mathcal{M},G,\alpha)$のフーリエ空間という。(2.6)、(2.8)より、$\eta,\xi\in L^2(G;\mathcal{H})$に対して

(2.9) $$\widehat{\eta\cdot\xi^b}(g)[x] = \langle\pi_\ell(x)\lambda(g)\eta|\xi\rangle \qquad (x\in\mathcal{M},\ g\in G)$$

なる$\widehat{\eta\cdot\xi^b}\in F_\alpha(G;\mathcal{M}_*)$が存在する。

これにより、$G\otimes_\alpha\mathcal{M}$は$(F_\alpha(G;\mathcal{M}_*), \|\cdot\|_*)^*$に同型となる。これをまとめると、

命題1、$(\mathcal{M}, G, \alpha)$ を可分な連続 W^*力学系とし、$\mathcal{M}$ を G-有限とすると、接合積 $G\otimes_\alpha\mathcal{M}$ のプレデュアル $(G\otimes_\alpha\mathcal{M})_*$ はフーリエ空間 $F_\alpha(G;\mathcal{M}_*)$ にバナッハ空間として同型である。

そこで $\tilde{\eta}\cdot\tilde{\eta}^b$, $\eta\in L^2(G;\mathfrak{H})$ なる形の $F_\alpha(G;\mathcal{M}_*)$ の要素を考えると、次の意味での α-正値性を満足する：

(2.10) $\quad \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{g_j}\circ\Phi(g_j^{-1}g_i)[x_j^* x_i] \geqq 0 \qquad (x_i\in\mathcal{M},\ g_i\in G)$ 。

ただし $\alpha_g\circ\varphi(x) = \varphi\circ\alpha_g^{-1}(x)$ $(\varphi\in\mathcal{M}_*,\ x\in\mathcal{M},\ g\in G)$ である。もし Φ が α-正値ならば、スカラーの場合と同様に、

(2.11) $\qquad \|\Phi\|_\infty = \|\Phi(e)\|,\quad \alpha_g\circ\Phi(g^{-1}) = \Phi(g)^*$

が成り立つ。

スカラーの場合と同様に次の一般化された Gelfand-Raikov の定理が成立する。

命題2、任意の α-正値強連続関数 Φ に対して、

(2.12) $\qquad \Phi(g)[x] = \langle \rho(x)V(g)\eta_0|\eta_0\rangle_\Phi \qquad (x\in\mathcal{M},\ g\in G)$

なるコバリアント表現 (ρ, V) とその巡回ベクトル $\eta_0\in\mathcal{H}$ が存在する。その逆も成り立つ。

さらに次の条件を考える。$\mathcal{M}_*$ に値をとる G 上の関数 Φ に対して、

(2.13) $\qquad \Phi\circ\pi_e \in L^2(G;\mathfrak{H})$ 。

ただし、$(\Phi\circ\pi_e)(g) = \Phi(g)\circ\pi_e$ と定義する。そのとき、次の一般化された Godement の定理が命題2と Phillips の結果を用い

て成立する。

命題3、Φ を強連続な α-正値関数とする。もし Φ が (2.13) を満たすならば、Φ は $F_\alpha(G; \mathcal{M}_*)$ に属す。逆に $\widetilde{\eta\eta^{b}}$, $\eta \in K(G; \mathcal{B})$ は (2.13) を満たす強連続 α-正値関数である。

§3　一般化されたシュワルツ空間とフーリエ空間

この節では $G = \mathbb{R}$ とする。$S(\mathbb{R}; \mathfrak{A})$ で無限回微分可能な $\mathfrak{A}$ に値をとる関数 η で、任意の非負値整数対 $(p, q) \geqq 0$ について

$$(3.1) \qquad \|\eta\|_{p,q} = \sup_{t \in \mathbb{R}} (1 + |t|^{p}) \|(D^{q}\eta)(t)\| < +\infty$$

となるもの全体とする。そのとき、$S(\mathbb{R}; \mathfrak{A})$ はフレッシェ空間になり $L^2(\mathbb{R}; \mathfrak{A})$ で稠密である。第 n エルミット関数を、

$$(3.2) \qquad h_n(t) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(t) e^{-t^2/2} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とおく。ただし、$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \dfrac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$ である。そのとき次の評価式が成り立つ。

補助定理4、$\{h_n\}_n$ をエルミット関数の列とすると、

$$(3.3) \qquad \|h_n\|_* \leqq C(n+1) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

なる定数 $C > 0$ が存在する。ただし $\|\cdot\|_*$ は $\mathbb{R}$ のフーリエ代数 $A(\mathbb{R})$ のノルムである。

これを用いて、命題3の結果を合わせると、次の重要な役割を果たす命題を得る。

命題5．Φ を $\Phi_\iota \circ \pi_\iota \in S(\mathbb{R}; \mathfrak{A})$ なる強連続な α-正値関数 Φ_ι の

線型結合としたとき、

(3.4) $$\|\Phi\|_* \leqq C \max_{1\leqq i\leqq n} \|\Phi\circ\pi_\ell\|_{p_i, q_i}$$

なる定数 $C>0$ と整数 $n\geqq 1$ が Φ に無関係に定まる。

$\|\Phi\|_{p,q} = \|\Phi\circ\pi_\ell\|_{p,q}$ とおき、$\|\cdot\|_{p,q}$ を持つ適当な試料空間を今から作る。$\mathcal{B}_\infty$ を $\xi_0(t) = \alpha_t\xi$ が無限回微分可能な $(\mathcal{B}, P_K)$ に値をとる関数である様な $\xi\in\mathcal{B}$ 全体とすると、$\mathcal{B}$ で稠密な J, Δ^z-作用で閉じている代数になる。さらに、$C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{B}_\infty)$ で無限回微分可能な $(\mathcal{B}_\infty, P_K)$ に値をとる関数でその台がコンパクトなもの全体とし、$C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{B}_\infty)$ で、任意の $(k, \ell)\geqq 0$ に対して、

(3.5) (i) $L^k D^\ell \eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{B}_\infty)$ (ii) $D^\ell L^k \eta = L^k D^\ell \eta$

なる $\eta\in C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{B}_\infty)$ 全体とすると、$C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{B}_\infty)$ は $L^2(\mathbb{R}; \mathfrak{H})$ で稠密な J, Δ^z-作用で閉じている代数になる。よって次の命題を得る。

命題6、可分な連続 W^*-力学系 $(\mathcal{M}, \mathbb{R}, \alpha)$ に対して、$\mathcal{M}$ が $\mathbb{R}$-有限とすると、冨田代数 $K(\mathbb{R}; \mathcal{B})$ の稠密な部分代数で、J, Δ^z-作用で閉じている、$C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{B}_\infty)$ に含まれているもの、$C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{B}_\infty)$ が存在する。

$D_\alpha(\mathbb{R}; \mathcal{M}_*)$ で $\widetilde{\eta\eta^b}$, $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{B}_\infty)$ で生成されるベクトル空間とすると、次の事が成り立つ。

命題7、任意の $\Phi\in D_\alpha(\mathbb{R}; \mathcal{M}_*)$, $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{B}_\infty)$ に対して、

$\{$ (i) $\Phi\circ\pi_\ell \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathfrak{H})$

$$
(3.6)\quad \begin{cases} \text{(ii)} & (D^n\Phi)\circ\pi_\ell = D^n(\Phi\circ\pi_\ell) \\ \text{(iii)} & D^n(\widetilde{\eta\eta^b}) = (-1)^n\,\widetilde{(D^n\eta)\,\eta^b} \end{cases}
$$

$(n=0,1,2,\cdots\cdots)$ が成り立つ。

命題7の(i)により、$D_\alpha(\mathbb{R};\mathcal{M}_*)$ 上で $\|\cdot\|_{p,q}$ は定義され得る。$S_\alpha(\mathbb{R};\mathcal{M}_*)$ で $D_\alpha(\mathbb{R};\mathcal{M}_*)$ の $\|\cdot\|_{p,q}$ に関する完備化とすると、命題5により $F_\alpha(\mathbb{R};\mathcal{M}_*)$ で稠密なフレッシェ空間となる。これを一般化されたシュワルツ空間という。そのとき、次の事が命題5から7までを用いて成立する。

命題8、$(\mathcal{M},\mathbb{R},\alpha)$ を $\mathbb{R}$-有限な可分連続 W^*-力学系とすると、接合積 $\mathbb{R}\otimes_\alpha\mathcal{M}$ は $S_\alpha(\mathbb{R};\mathcal{M}_*)$ の双対空間に含まれる部分空間である。

§4 接合積におけるフーリエ展開

この節では、スカラーの場合のシュワルツの結果を一般化されたシュワルツ空間 $S_\alpha(\mathbb{R};\mathcal{M}_*)$ の双対空間 $S_\alpha(\mathbb{R};\mathcal{M}_*)^*$ に対して行なう。([5])。

定理9、$(\mathcal{M},\mathbb{R},\alpha)$ を $\mathbb{R}$-有限な可分連続 W^*-力学系とすると、$T\in S_\alpha(\mathbb{R};\mathcal{M}_*)^*$ である為の必要十分条件は

$$
(4.1)\qquad T(\Phi) = \int_{\mathbb{R}} (1+|t|^q)\,\langle \xi(t) \mid D^p\Phi(t)\circ\pi_\ell \rangle\, dt, \quad \Phi\in S_\alpha(\mathbb{R};\mathcal{M}_*)
$$

なる $(p,q)\geq 0$ と $\xi\in BC(\mathbb{R};\mathfrak{H})$ が存在することである。ただし、$BC(\mathbb{R};\mathfrak{H})$ は $\mathfrak{H}$ へ値をとる $\mathbb{R}$ の有界連続関数全体とする。

いま、$S_0(\mathbb{R};\mathfrak{Z})$ で $\Phi\circ\pi_\ell$，$\Phi\in S_\alpha(\mathbb{R};\mathcal{M}_*)$ 全体とすると、(2.7) と定理9より、次の結果を得る。

定理10、定理9と同じ仮定の下で、$T\in S_\alpha(\mathbb{R};\mathcal{M}_*)^*$ に対して、(4.1) なる表現を考える。そのとき、$T\in\mathbb{R}\otimes_\alpha\mathcal{M}$ なる為の必要十分条件は D^pT_η が $S_0(\mathbb{R};\mathfrak{Z})^*$ で $T_{0\xi}$，$\xi\in K(\mathbb{R};\mathcal{B})$、$\|\pi_\ell(\xi)\|\leqq C$ による極限値になる様な定数 $C>0$ が存在することである。ただし、$\eta(t)=(1+|t|^2)\xi(t)$ とおき、D^pT_η は

$$(D^pT_\eta)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \langle \eta(t) \mid (D^p\xi)(t) \rangle dt, \quad \xi\in S_0(\mathbb{R};\mathfrak{Z})$$

なる $S_0(\mathbb{R};\mathfrak{Z})^*$ の要素である。

その系として、

系11、定理10と同じ仮定の下で、

$T\in\mathbb{R}\otimes_\alpha\mathcal{M}$ ならば、

$$\langle T\eta_1 \mid \eta_2 \rangle = D^pT_\eta(\widetilde{\eta_1\eta_2^b}\circ\pi_\ell) \tag{4.2}$$

$\eta_1,\eta_2\in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathcal{B}_\infty)$ がなりたつ。

上の結果の原型となるものは、Loupias - Miracle-Sole のシュレーディンガー表現の作用素がテンパード超関数に表わされるという結果や Eymard による群環が超関数空間に埋め込めるという結果 etc がある。([2],[3])

一注意として、接合積 $\mathbb{R}\otimes_\alpha\mathcal{M}$ の生成要素 $\pi_\alpha\circ\pi_\ell(\xi)$，$\lambda(t)$ はそれぞれ、$T_{\delta_0\otimes\xi}$，$T_{\delta_t\otimes\xi_0}$ $(\xi\in\mathcal{B},\ t\in\mathbb{R})$ と表わされる。これらはまた $D^2T_{Y_0\otimes\xi}$，$D^2T_{Y_t\otimes\xi_0}$ の様にテンパード表現される。

ただし $Y_t \quad s\chi_{[t,\infty)}(s) \quad (t\in\mathbb{R})$ なる緩増加関数である。

§5 相対可換子代数について

この節は話が発散した方向にあることを前置きして進めてみる。従来、接合積を研究する上で相対可換子代数$(G\otimes_\alpha \mathcal{M})\cap \mathcal{M}'$は非常に有力な情報を与えてくれるものであったが、その時の群Gは離散であった。

いま、§4の結果の応用の一つとして、$(\mathbb{R}\otimes_\alpha \mathcal{M})\cap \mathcal{M}'$を計算してみる。

$T\in(\mathbb{R}\otimes_\alpha \mathcal{M})\cap \mathcal{M}'$に対して、(4.2)より、

$$\langle T\eta_1 | \eta_2\rangle = D^p T_\eta(\widetilde{\eta_1\eta_2^b}\circ\pi_\ell)\ ,\quad \eta_i\in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathcal{B}_\infty)$$

なる整数$p\geq 0$と$\eta(t)=(1+|t|^2)\xi(t)$, $\xi\in BC(\mathbb{R};\mathfrak{H})$が存在する。$T\in\mathcal{M}'$より $\langle T\pi_\ell(\xi)\eta_1|\eta_2\rangle = \langle T\eta_1 | \pi_\ell(\xi^\#)\eta_2\rangle$, $\xi\in\mathcal{B}_\infty$となる。$\pi_\ell(\xi)\eta_1$, $\pi_\ell(\xi^\#)\eta_2\in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathcal{B}_\infty)$より、右辺の関係式から、(3.6)を使って、任意の$\xi\in\mathcal{B}_\infty$に対して、

$$(5.1)\quad \int_{\mathbb{R}}\langle[\pi_\ell(\xi)-\pi_r(\alpha_t\xi)]\eta(t)\,|\,D^p\Phi(t)\circ\pi_\ell\rangle dt$$
$$= \sum_{k=1}^{p} C_k\int_{\mathbb{R}}\langle \pi_r[D^k\xi_0(-t)]\eta(t)\,|\,D^{p-k}\Phi(t)\circ\pi_\ell\rangle dt\ ,$$

$\Phi\in D_\alpha(\mathbb{R};\mathcal{M}_*)$ となる。ただし、C_kは定数である。

特殊な場合（αが自明な場合）： $D^k\xi_0(-t)=0 \quad (k\geq 1, t\in\mathbb{R})$ より、スカラーの場合の超関数論より、

$$(5.2)\qquad [\pi_\ell(\xi)-\pi_r(\xi)]\eta(t) = \sum_{k=0}^{q} a_k(\xi)\,t^k\ ,\quad (\xi\in\mathcal{B}_\infty)$$

なる $a_t(\xi)\in\mathfrak{H}$ が存在する。

一般の場合： E_0 を $[\xi\in\mathfrak{H}: a_t\xi=\xi]$ への射影とすると、$E_0\in U(R)''$ より J, Δ^z と可換になる。$E_0\mathcal{B}_\infty\subset\mathcal{B}_\infty$ より、$E_0\mathcal{B}_\infty$ 上では、上の場合に帰着され、問題は $E_0^\perp\mathcal{B}_\infty$ 上での解析が残る。(作用の自由性に対応する。)

参考文献

[1] A. Connes : *Almost Periodic states and factors of type* III_1. J. Func. Anal., 16 (1974), 415 − 445.

[2] P. Eymard : *L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact.* Bull. Soc. Math. France., 92 (1964), 181−236.

[3] G. Loupias et S. Miracle-Sole : *C*-algèbre des systems canoniques. II* Ann. Inst. Henri Poincaré., Vol. VII, 1. (1967)

[4] J. Phillips : *Positive integrable elements relative to a left Hilbert algebra.* J. Func. Anal., 13 (1973), 390−409.

[5] L. Schwartz : *Théorie des distributions.* Gauthier-Villars, Paris (1966)

[6] H. Takai : *The quasi-orbit space of continuous C*-dynamical systems.* To appear in Trans. Amer. Math. Sci.

[7] H. Takai : *On a Fourier expansion in continuous crossed products.* To appear in Pub. R.I.M.S., Kyoto Univ.

[8] M. Takesaki : *Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III*. Acta Math., 131 (1973), 249 – 310.

[9] G. Zeller-Meier : *Produits croisés d'une C*-algèbre par un groupe d'automorphismes*. J. Math Pure et Appli., 47 (1968) 101 – 239.