数理解析研究所講究録
第278巻 1976年 43-50

Unbounded Derivation について

東工大理　生西明夫

C^*-代数および von Neumann 代数の対称な非有界 derivation についての最近の Bratteli と Robinson の結果を紹介し、あわせて、対称でない derivation について述べる。

C^*-代数 A の稠密な対称部分代数 $D(\delta)$ から A への、次の性質をもつ線型写像 δ を derivation と言う。

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y), \quad x, y \in D(\delta).$$

derivation δ に対して、次のように定義された δ^* は、また derivation である。

$$\delta^*(x) \equiv \delta(x^*)^*, \quad x \in D(\delta).$$

$\delta = \delta^*$ のとき δ は対称であるという。

τ_t を A の自己同型の強連続な1径数群とすると τ_t の生成作用素が A の閉じた derivation ——一般に有界でない—— であり、特に、自己同型が自己対称ならば対称な derivation であることは容易に知られる。しかし、逆に、derivation が

すべて強連続な1径数群を生成する訳ではない。

von Neumann 代数 M の場合には derivation δ の定義域は弱稠密であるとする。τ_t が M の弱連続な自己同型の1径数群ならば、τ_t の生成作用素 δ は弱閉な M の derivation である。また、${}^T\tau_t$ を τ_t の M_* 上の双対とすると、${}^T\tau_t$ はバナッハ空間 M_* 上の強連続な1径数群であり、その生成作用は δ の双対であることに注意しよう。

以下で C^*-代数あるいは von Neumann 代数の derivation の1径数群の生成作用素としての特徴付を述べる。

まず、一般の Banach 空間の場合の定理を与える。

<u>定理 1</u>.([H]). δ を Banach 空間 X における線型写像とする。

条件 (A), (B) は次のとおりである。

(A). $\|\tau_t\| \leqslant N e^{\beta|t|}$, $M \geqslant 1$, $\beta \geqslant 0$.

(B) $\|(\alpha\delta+1)^n(x)\| \geqslant N^{-1}(1-|\alpha|\beta)^n\|x\|$, $n \geqslant 1$, $x \in \bigcap_n D(\delta^n)$.

ただし, $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha|\beta < 1$, $N \geqslant 1$, $\beta \geqslant 0$ である。

次の条件は互いに同等である。

1. δ は条件 (A) を満たす X 上の1径数群 τ_t の生成作用素である。

2. δ は閉かつ、条件(B)を満たし、$|\alpha|\beta < 1$ なる $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\overline{(\alpha\delta+1)(D(\delta))} = X$.

3. δは閉かつ，条件(B)を満たし，δに関して解析的な要素の全体はXで稠密である，

さらに，$N=1$，$\beta=0$の場合には，条件(B)は

$$\|(\alpha\delta+1)(x)\| \geqq \|x\|, \quad x \in D(\delta), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

と同等である。

定理1よりただちに，C^*-代数の場合の定理を得る。

<u>定理2</u>[[1]]. δをC^*-代数Aの*derivation*とする。条件(A), (B)は定理1と同じとする。

次の条件は同等である，

1. δはAの自己同型の強連続な1径数群の生成作用素であり，条件(A)を満たす。

2. δは閉かつ，条件(B)を満たし，$|\alpha|\beta<1$なる任意の$\alpha\in\mathbb{R}$に対して，

3. δは閉かつ，条件(B)を満たし，δに関して解析的な要素の全体はAで稠密である。

さらに，δが対称の場合は，自己同型は対称で，条件(B)は条件

$$\|(\alpha\delta+1)(x)\| \geqq \|x\|, \quad x \in D(\delta), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

で置きかえられる。

定理2より，von Neumann代数の場合は次の定理を得る．

<u>定理3.</u>([2]) δはvon Neumann 代数Mの derivation とする。条件(A),(B)は定理1.と同じとする．

次の条件は同等である．

1．δはMの自己同型の弱連続な1径数群の生成作用素であり，条件(A)を満たす．

2．δは弱閉かつ，条件(B)を満たし，任意の$|\alpha|\beta<1$なる$\alpha\in\mathbb{R}$に対して，$(\alpha\delta+1)(D(\delta))$は$M$で弱稠密である．

3．δは弱閉かつ，条件(B)を満たし，δに関して解析的な要素の全体は弱稠密である．

さらに，δが対称の場合には，自己同型は対称であり，条件(B)は条件

$$\|(\alpha\delta+1)(x)\|\geq\|x\|,\quad x\in D(\delta),\ \alpha\in\mathbb{R}$$

で置きかえられる．

さらに，δが対称な derivation ならば，条件(B)は次の条件

$$(\alpha\delta+1)(x)\geqslant 0\ \Rightarrow\ x\geqslant 0,\quad x\in D(\delta),\ \alpha\in\mathbb{R}$$

で置きかえられる．([1,2])

次に不変な state をもつ場合について述べる．δをC^*-代数A (von Neumann 代数M)の自己同型の連続な1径数群τ_tの生成作用素とするとき，A (M) の state ω がτ_tについて不変であるためには$\omega\circ\delta=0$であることが必要十分である．

命題4. δ を C^*-代数 A (von Neumann 代数 M) の derivation とする. $\omega\circ\delta=0$ なる A (M) の忠実な state ω (normal state) が存在するとする. $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ を ω に伴う GNS 表現とする.

このとき,

1. δ は closable である.

2. $\mathcal{H}$ 上の closable な作用素 H が存在して,

$$D(H)=\pi(D(\delta))\xi, \qquad D(\delta)\,D(H)\subset D(H),$$

$$\pi(\delta(x))\eta = i\,[H, \pi(x)]\,\eta, \qquad \eta\in D(H),\ x\in D(\delta).$$

さらに δ が対称ならば, H も対称である.

定理5. ([1,2]) δ は C^*-代数 A (von Neumann 代数 M) の対称な derivation とする. $\omega\circ\delta=0$ なる忠実な state ω (normal state) が存在するとする. このとき, 任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して, $(\alpha\delta+1)(D(\delta))$ が A において稠密 (M において弱稠密) あるいは, δ に関する解析的な要素の全体が稠密 (弱稠密) ならば δ の閉包 $\bar{\delta}$ は対称自己同型の強(弱)連続な1径数群の生成作用素である.

[2] において, 次の Conjecture が提出されている.

Conjecture. M をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の分離かつ, 巡回的ベクトル ξ をもつ von Neumann 代数とする. δ を M の対称な derivation で $\mathcal{H}$ 上の自己対称作用素 H によって与えられて

いるとする。すなわち，$D(\delta)D(H) \subset D(H)$，

$$\delta(x)\eta = i[H, x]\eta, \quad x \in D(\delta), \ \eta \in D(\delta).$$

さらに，$\xi \in D(H)$，$H\xi = 0$ かつ H は $D(\delta)\xi$ 上で本質的自己対称とする．このとき，

$$e^{itH} M e^{-itH} = M, \quad t \in \mathbb{R}.$$

であるか？

このConjectureは δ が $\omega_\xi \circ \tilde{\delta} = 0$ なる M の自己同型の弱連続な1径数群の生成作用素 $\tilde{\delta}$ に拡張できるかどうかということにほかならない．また，$D(\tilde{\delta}) = \{x \in M \mid [H, x]\eta M$ かつ，$[H, x]$ は有界$\}$ 上で $\tilde{\delta}(x) = \overline{i[H, x]}$ によって定義される M の derivation が M の自己同型の弱連続な1径数群の生成作用素になるかということでもある．

<u>定理6</u>．(Bratteli, Robinson [2,3]) Conjecture の仮定のもとで，また，$D(\tilde{\delta})$，$\tilde{\delta}$ は上のとおりとするとき，次の条件は同等である．

1. $e^{itH} M e^{-itH} = M, \quad t \in \mathbb{R}$,
2. $(1 \pm iH)^{-1} M\xi \subset D(\tilde{\delta})\xi$
3. $(1 \pm iH)^{-1} M_+\xi \subset \overline{M_+\xi}$
4. $e^{itH} M_+\xi \subset \overline{M_+\xi}, \quad t \in \mathbb{R}$

5. $e^{itH} V_{1/4} \subset \overline{V_{1/4}}$,　$t \in \mathbb{R}$

ここで，$V_{1/4} = \overline{\Delta^{1/4} M_+ \xi}$.

<u>定理7</u>．Conjecture の仮定のもとで，次の条件 1－3 は

$$e^{itH} M e^{-itH} = M \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

であるための十分条件である．

1．$D(\delta)$ の弱稠密な自己対称部分空間 B があって，

$\delta(B) \subset B$ かつ任意の $x \in B$ に対して，$t_x \neq 0$ があって，

つ、は $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!} \| \delta^n(x)\xi \| < +\infty$,　$|t| < t_x$.

2．M は可換である．

3．ω_ξ は trace である．

次の定理は対称でない自己同型群についてのものである．

<u>定理8</u>．τ_t を C^*-代数 A (von Neumann 代数 M) の自己同型の強(弱)連続な 1 径数群とする．δ を τ_t の生成作用素とする．さらに，τ について不変な state (normal state) ω が存在するとする．$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ を ω に伴う GNS 表現とする．このとき，

1．$\mathcal{H}$ 上の強連続な 1 径数群 T_t が存在して，$\pi(\tau_t)\pi^{-1} = Ad\,T_t$ かつ T_t の生成作用素を K とすると，$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$

$$\pi(\delta(x))\eta = [K, \pi(x)]\eta, \quad x \in D(\delta), \ \eta \in D(K).$$

2. $\|\tau_t\| \leqslant e^{\beta|t|}$ $(\beta \geqslant 0)$ かつ, $D(\delta)\cap D(\delta)^*$ が稠密ならば, 対称な derivation δ_1 と δ_2 が存在して, δ_1 は生成作用素, δ_2 は有界であり, かつ, $\delta = \delta_1 + i\delta_2$
そして,

$$\tau_t = e^{t\delta_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} i^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \; e^{-t_1\delta_1}\delta_2 e^{t_1\delta_1} \cdots \cdots e^{-t_n\delta_1}\delta_2 e^{t_n\delta_1}.$$

である。

References

1. O. Bratteli and D. W. Robinson, Unbounded derivations of C*-algebras. II., CNRSPreprint
2. ――――――; Unbounde derivations of von Neumann algebras, CNRS Preprint
3. ――――――, Unbounded derivations and invariant trace states. CNRS Preprint
4. H. Araki, Expansional in Banach algebras, RIMS
5. T. Kato, Perturbation theory for linear operator, Springer Verlag Berlin (1966)