数理解析研究所講究録
第 278 巻 1976 年 51-62

Lorentz algebraについて

九大 理　太田昇一

§1. 序

Indefiniteな内積をもつHilbert spaceはJ-spaceとも、Minkowsky spaceとも言われ、そのindefiniteな内積によるadjoint operationでhermitianやunitaryな有界線型作用素は、古くからロシヤにおいて研究されて来た。一方、最近になって、M. TomitaやS.V.Šul'man等によって作用素環論的な考察がされて来た。しかし、現在までのところ何ら大きな成果は何もないようである。それは通常のv. Neuman型(or Kaplansky型)のdensity定理が成立しないことによる。この小論では、不変部分空間との間の関連を考察するが、表現論との関連、および通常の作用素環(特にderivation)との関連もあるように思われる。

§2. Lorentz algebra

$\mathfrak{A}_0$を単位元をもつ C^*-algebra とする。$\mathfrak{A}_0$の involution $*$ を明確に示すため $(\mathfrak{A}_0, *)$と示すことにする。$\mathfrak{A}$を$\mathfrak{A}_0$の Banach subalgebra で、ある involution φ をもつ Banach $*$-algebra とする。そのとき、$\mathfrak{A}$が$\mathfrak{A}_0$に関して Lorentz algebra (w.r.t $\mathfrak{A}_0$) であるとは、

$\exists J$ (unitary, hermitian) $\in \mathfrak{A}_0$ s.t. $A^\varphi = JA^*J$ for all $A \in \mathfrak{A}$

が成立することをいう。

この$\mathfrak{A}$を以後 $(\mathfrak{A}, \varphi ; J)$ と書くことにする。

上の条件の下に、

$$U(\mathfrak{A}, \varphi) \equiv \{ X \in \mathfrak{A} : X^\varphi X = XX^\varphi = 1 \}$$

$$(\mathfrak{A}_0, *)^+ \equiv \{ X \in \mathfrak{A}_0 : X \geqq 0 \}$$

$$H(\mathfrak{A}, \varphi) \equiv \{ X \in \mathfrak{A} : X^\varphi = X \}$$ と定義すると、

<u>定理 2.1</u>

Lorentz algebra $(\mathfrak{A}, \varphi ; J)$ が $\mathfrak{A}_0$の involution $*$ で閉じているとする。そのとき、$A \in U(\mathfrak{A}, \varphi)$ に対して、我々は次のような一意に決まる分解をもつ；

$$A = B \cdot C$$

ここに、 $B \in U(\mathfrak{A}, \varphi) \cap (\mathfrak{A}_0, *)^+$

$C \in U(\mathfrak{A}, \varphi) \cap U(\mathfrak{A}_0, *)$ 。

(証明) $A \in U(\mathfrak{A}, \varphi)$ とする。そのとき、

$$(AA^*)^\varphi = JAJ \cdot JA^*J = (A^*)^{-1}(A)^{-1} = (AA^*)^{-1}$$

すなわち、$AA^* \in \mathcal{U}(\mathfrak{A},\varphi) \cap (\mathfrak{A}_0,*)^+$。ここで、仮定より、$\mathfrak{A}$は involution $*$ で $(\mathfrak{A}_0,*)$ の C^*-subalgebra に注意すると、スペクトル論より、$(AA^*)^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}$ で、$J(AA^*)^{\frac{1}{2}}J = (AA^*)^{-\frac{1}{2}}$。ここで、

$B \equiv (AA^*)^{\frac{1}{2}}$, $C \equiv B^{-1}A$ とおくと、

$C^*C = A^*B^{-1}B^{-1}A = A^*(AA^*)^{-1}A = 1$, 同様に、$CC^* = 1$ を得る。

従って、$B \in \mathcal{U}(\mathfrak{A},\varphi) \cap (\mathfrak{A}_0,*)^+$, $C \in \mathcal{U}(\mathfrak{A},\varphi) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{A}_0,*)$、又分解の一意性は、ほとんど明らかである。

次に Lorentz 環 $(\mathfrak{A},\varphi;J)$ w.r.t $(\mathfrak{A}_0,*)$ が、C^*-Lorentz algebra であるとは、Lorentz algebra $(\mathfrak{A},\varphi)$ が Banach $*$-algebra として、C^*-条件を満たすときを言う。次の定理は、C^*-Lorentz algebra を決定するものである。

<u>定理2.2</u>

$(\mathfrak{A},\varphi:J)$ を Lorentz algebra w.r.t $(\mathfrak{A}_0,*)$ とするとき、次の条件は同値である。

(イ) $(\mathfrak{A},\varphi)$ が C^*-Lorentz algebra.

(ロ) $A^\varphi = A^*$ for all $A \in \mathfrak{A}$.

(ハ) $J \in \mathfrak{A}'$ ($\mathfrak{A}'$: $\mathfrak{A}$ の commutant).

(ニ) $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{A}_0$ の involution $*$ で閉じており、$(\mathfrak{A},\varphi)$ が hermitian.

(証明) 容易なので省略.

次にLorentz algebraの例を与えるが、その前にJ-spaceの概念が必要になるので、それを先に述べる。

$\mathfrak{H}$をHilbert space，$(x|y)$は通常の内積とする．$[x|y]_\varphi$を$\mathfrak{H}$上のsesquilinear formとする。その時、$[x|y]_\varphi$がMinkowsky formであるというのは、次の条件(i)(ii)を満たすときをいう；

(i) $[x|y]_\varphi=\overline{[y|x]_\varphi}$ for all $x, y\in\mathfrak{H}$,

(ii) $\|x\|=\sup\{|[x|y]_\varphi| : \|y\|\leqq 1\}$ for all $x\in\mathfrak{H}$.

又$[x|x]_\varphi$が正と負の値をもつとき、$[x|y]_\varphi$はindefiniteと言い、そうでないときdefiniteと言われる．

上のようなMinkowsky formをもつHilbert spaceをJ-spaceと呼ぶことにする。

次の補題はRieszの定理より明らかであるが、基本的である．

<u>補題2.3</u>

sesquilinear form $[x|y]_\varphi$がMinkowsky formであるための必要十分条件は、ある一意的にhermitian, unitary作用素Jが存在して、 $[x|y]_\varphi=(Jx|y)$ for all $x, y\in\mathfrak{H}$, となることである．

更に、上のMinkowsky form $[x|y]_\varphi$がdefiniteであるための必要十分条件は、$J=1$ or -1なることである。

<u>例1</u> $\mathfrak{H}$をJ-spaceとする。$\mathfrak{A}$を$\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$のBanach subalgebra

とする。もしも、与えられた Minkowsky form $[x|y]_\varphi$ で定義される adjoint operation による involution φ で閉じたものは、$\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ に関する Lorentz algebra である。

実際、補題2.3より、∃1 J : unitary hermitian operator,

$$[Ax|y]_\varphi = (JAx|y) = (Jx|JA^*Jy) = [x|JA^*Jy]_\varphi \quad \text{for all } x, y \in \mathfrak{H}.$$

従って、 $A^\varphi = JA^*J$ for all $A \in \mathfrak{A}$。

ここで、定理2.2に関する次の系をもつ.

<u>系2.4</u>

J-空間 $\mathfrak{H}$ 上の Lorentz algebra $(\mathfrak{A}, \varphi : J)$ が $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ で weakly dense とする。そのとき J-空間 $\mathfrak{H}$ が definite であるための必要十分条件は、$(\mathfrak{A}, \varphi : J)$ が C^*-Lorentz algebra になることである。

§3. 不変部分空間

$\mathfrak{H}$ を Minkowsky form $[x|y]_\varphi = (Jx|y)$ をもつ J-space とする。我々は、まず基本的な概念から始める.【J-space の用語、その他については [ ], [ ] 等も参照】。$\mathfrak{M}$ を subspace (閉じた) とする.

(イ) $\mathfrak{M}$ が J-nonnegative $\Leftrightarrow$ $[x|x]_\varphi \geq 0$ for $\forall x \in \mathfrak{M}$,

(ロ) $\mathfrak{M}$ が J-positive $\Leftrightarrow$ $[x|x]_\varphi > 0$ for $\forall x \neq 0 \in \mathfrak{M}$,

(ハ) $\mathfrak{M}$ が J-uniformly positive $\Leftrightarrow$ ある定数 $\gamma > 0$ が存在して

$$[x|x]_\varphi \geq \gamma \|x\|^2 \quad \text{for } \forall x \in \mathfrak{M}.$$

(イ)(ロ)(ハ)と同様にして、J-nonpositive, J-negative, J-uniformly negative

が定義される。さらに、subspace $\mathfrak{M}$ が J-positive or J-negative の時 J-strongly definite, J-uniformly positive or J-uniformly negative の時、J-uniformly definite であると言い、又、上のそれぞれの場合について、$\mathfrak{M}$ が maximal であるとは他の同じタイプの subspace に真に含まれることがないときを言う。

$\mathfrak{M}^{[\perp]} \equiv \{x \in \mathfrak{H} : [x|y]_\varphi = 0 \text{ for all } x \in \mathfrak{M}\}$ を $\mathfrak{M}$ の J-orthogonal complement と言う。次の補題は明らかである.

<u>補題3.1</u>

J-space $\mathfrak{H}$ 上の有界線型作用素Tの不変部分空間 $\mathfrak{M}$ に対し、$\mathfrak{M}^{[\perp]}$ は、$T^\varphi = JT^*J$ の不変部分空間である.

又、$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}^{[\perp]} = \{0\} \Leftrightarrow \mathfrak{H} = \overline{\mathfrak{M} + \mathfrak{M}^{[\perp]}}$ より、$\mathfrak{M}$ が J-strongly definite ならば、$\mathfrak{H} = \overline{\mathfrak{M} + \mathfrak{M}^{[\perp]}}$ になることを注意しておく。

次の定理は、J-space $\mathfrak{H}$ 上の C^*-Lorentz algebra の特徴づけである。与えられた Minkowsky form を定義する unitary hermitian operator J に対し、$P_+ \equiv \frac{1}{2}(1+J)$, $P_- \equiv \frac{1}{2}(1-J)$ とおくと、P_+, P_- は orthogonal complementary projections で $J = P_+ - P_-$。又 $P_+\mathfrak{H} \equiv \mathfrak{H}_+$, $P_-\mathfrak{H} \equiv \mathfrak{H}_-$ とおくと $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_-$。

<u>定理3.2</u>

$(\mathfrak{A}, \varphi ; J)$ を J-space $\mathfrak{H}$ 上の Lorentz algebra とする。そのとき、$(\mathfrak{A}, \varphi)$ が C^*-Lorentz algebra になるための必要十分条件は、$\mathfrak{H}_+$, $\mathfrak{H}_-$ を不変部分空間としてもつことである。

〔証明〕 定理2.2より従う。

（注意） 上の定理3.2において、$\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}_-$ は maximal J-uniformly positive。故に我々は自然に、"いかなる場合に、$\mathfrak{H}$上の Lorentz algebra が、この種の不変部分空間をもつか？"という問題をもつ。この件については、後の§で再び問題とする。

<u>補題3.3</u>

$\mathfrak{H}$上の Lorentz algebra $(\mathfrak{A}, \varphi; J)$ が、J-strongly definite subspace $\mathfrak{M}$を不変部分空間としてもつならば、$(\mathfrak{A}, \varphi)$ の $*$-radical R^* は$\mathfrak{M}$上0となる$\mathfrak{A}$の元の集合に含まれる。

補題3.3とp6の補題3.1の下の注意より、次の定理を得る。

<u>定理3.4</u>

$\mathfrak{H}$上の Lorentz algebra $(\mathfrak{A}, \varphi; J)$ が、2つの J-strongly definite subspace $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ を不変にするとする。もしも、$\mathfrak{H}$が$\mathfrak{M}$と$\mathfrak{N}$による closed linear span だとすると、$(\mathfrak{A}, \varphi)$ は $*$-semi-simple になる。 特に、$(\mathfrak{A}, \varphi)$ が $\mathfrak{A}$-不変な maximal J-strongly definite subspace をもつならば、$(\mathfrak{A}, \varphi)$ は $*$-semi-simple である。

次に、Banach $*$-algebra が、ある Hilbert space 上の C^*-algebra に $*$-isomorphic な時に、C^*-equivalent であるという。

例2（C^*-equivalent で not C^*-Lorentz algebra）

$\mathfrak{B}$ を C^*-algebra とする。（ただし、$\mathfrak{B}$ は、ある Hilbert space $\mathfrak{H}$ 上に作用しているとする。）　δ を $\mathfrak{B}$ 上の hermitian derivation とする。

そして、$\mathfrak{A}_0 \equiv \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} ; A, B, C, D \in \mathfrak{B} \right\}$ on $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$

$J \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

明らかに $\mathfrak{A}_0$ は $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ 上の operator adjoint で C^*-algebra になり、

$$\mathfrak{A} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} A & \delta(A) \\ 0 & A \end{pmatrix} ; A \in \mathfrak{B} \right\}$$

とおくと、$\mathfrak{A}$ は J によって induce される involution でもって、Lorentz algebra w.r.t $(\mathfrak{A}_0, *)$ になり、しかも C^*-equivalent である。

定理3.5

$\mathfrak{H}$ 上の Lorentz algebra $(\mathfrak{A}, \varphi : J)$ が、J-uniformly positive subspace $\mathfrak{M}$ と J-uniformly negative subspace $\mathfrak{N}$ を不変部分空間としてもつとする。さらに $\mathfrak{H}$ は $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{N}$ の直和であるとする。そのとき、$(\mathfrak{A}, \varphi)$ は C^*-equivalent になる。

特に、$(\mathfrak{A}, \varphi : J)$ が $\mathfrak{A}$-不変な maximal J-uniformly definite subspace をもつならば、$(\mathfrak{A}, \varphi)$ は C^*-equivalent になる。

我々は J-space $\mathfrak{H}$ 上の C^*-Lorentz algebra の場合は、maximal J-uniformly subspace $\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}_-$ によって、完全に決定された。従って、自然に次の問題をもつ。定理3.5の逆は真か？。すなわち、

★"$\mathfrak{H}$上の C^*-equivalent Lorentz algebra は、maximal J-uniformly subspace を不変部分空間としてもつか？"。

この問題は、可換の場合、yes の解答を得るが、それを示すには、次の補題が基本的である。

<u>補題3.6</u> [R.S. Phillips, ;Theorem 6.1]

代数的 Lorentz algebra $\mathfrak{A}$ が maximal J-uniformly positive subspace を不変部分空間としてもつための必要十分条件は、元の内積に equivalent な内積 $(x|y)'$ が存在して、その内積による adjoint operation を $A \longrightarrow A^{*'}$ としたとき、 $A^{\varphi}=A^{*'}$ for $\forall A\in\mathfrak{A}$
が成り立つことである。

<u>定理3.7</u>

可換な C^*-equivalent Lorentz algebra $(\mathfrak{A}, \varphi ; J)$ は、ある maximal J-uniformly subspace を不変にする。

一般の場合については、次の§で定義する Lorentz 表現の用語を用いて述べられる。

§4. Lorentz表現.

$\mathfrak{A}$を一般の$*$-algebraとする。πを$\mathfrak{A}$から Hilbert space $\mathfrak{H}$上へのrepresentation (一般にinvolutionは保存しない).とする。

そのとき、

<u>定義4.1</u>

πがJ-representationであるとは、あるπに連結したMinkowsky form $[x|y]_p=(Jx|y)$をもつJ-space $\mathfrak{H}_\pi$が存在して、それが$\mathfrak{A}$から$(\mathcal{B}(\mathfrak{H}),\varphi;J)$の中への$*$-homomorphismになることを言う。特に、連続なJ-representationをLorentz representationと呼ぶことにする(連続性を考えるときは$\mathfrak{A}$はtopological $*$-algebraと考えている)。

[注意]; 我々は、単に$*$-representationという用語を、通常の$\mathfrak{H}$上のadjoint operationによる$\mathcal{B}(\mathfrak{H})$のinvolutionとの間のinvolution-保存表現にのみ用いる。

さて、πを$*$-alg $\mathfrak{A}$の$\mathfrak{H}$上へのrepresentationとすると、πはJ-representationを誘導する。実際、

$$\hat{\pi}(x)\equiv\begin{pmatrix}\pi(x) & 0\\ 0 & \pi(x^*)^*\end{pmatrix}\ \text{on}\ \mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}\ ,\quad J\equiv\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ \text{とおくと}$$

$J\hat{\pi}(x)^*J=\hat{\pi}(x^*)$ を得る.

従って、$*$-algのrepresentationを研究するには、J-representation (Lorentz representation)を研究すれば十分である。

補題4.2

$*$-algebra $\mathfrak{A}$ から J-space $\mathfrak{H}$ (with $[x|y]_\varphi = (Jx|y)$) への J-representation π が、ある $*$-representation ρ に similar (intertwining operator を X とする)であるとする。そのとき、

$$XJX^* \in \rho(\mathfrak{A})' \quad , \quad J \in \pi(\mathfrak{A})'(X^*X)^{-1}$$

命題4.3

$\mathfrak{A}$ を Banach $*$-algebra とする。π を indefinite な J-space $\mathfrak{H}$ 上への Lorentz representation とする。そのとき、π はどんな irreducible な $*$-representation にも similar ではない。

次の定理は、S.V. Šul'man の suggestion である。

定理4.4

π を $*$-algebra $\mathfrak{A}$ の J-space 上への J-representation とする。そのとき、次の条件は同値である。

(a) $(\pi(\mathfrak{A}), \varphi; J)$ は maximal J-uniformly positive subspace を不変部分空間としてもつ

(b) J-representation π は、ある $*$-representation に similar である。

この定理と、C*-equivalent の定義より従う "J-space 上の Lorentz algebra $(\mathfrak{A}, \varphi)$ が C*-equivalent になるための必要十分条件は、

$\mathfrak{A}$があるC^*-algebraのJ-space上へのLorentz representationのimageであること"に注意すると、

<u>定理4.5</u>

C^*-equivalent Lorentz algebraが、あるmaximal J-uniformly positive subspaceを不変にするための必要十分条件は、あるC^*-algebraからその上への$*$-representationにsimilarなLorentz representationが存在することである。

References

[1] Kreĭn, M.G. ; Amer. Math. Soc. Transl, 93 (1970) p103～p176

[2] Iohvidov, I.S., Kreĭn, M.G. ; Amer. Math. Soc. Transl. 13 (1960) p105～p175.

[3] S. Ôta ; Memoirs. Fac. Sci Kyushu Univ. Ser.A. (1975)

[4] R.S. Phillips ; Proc. Intern. Symp (Linear Spaces), Jerusalem (1960)

[5] M. Tomita ; Lectures in Kyushu Univ 1973/74, 1975～.