数理解析研究所講究録
第297巻 1977年 69-84

S^3のHeegaard分解によるπ_1の表示について

東教大理　金戸武司

§1 序

1. 動機

連結な向き附け可能な3次元多様体MのHeegaard分解は，自然にその基本群$\pi_1(M)$の表示を与える。一般に，Mの幾何的な構造が，代数的な側面として，この$\pi_1(M)$の表示に，どのように反映するかという問題が考えられる。この方向について，Birman-Hilden [1]，H. Komuro [2]は，「Heegaard genus 2の多様体Mは，分解の仕方を工夫して，対応する$\pi_1(M)$の表示が対称性をもつようにできる」を示した。Birman-Hilden [1]は，又，特に，$M \approx S^3$の場合について，常に，$\pi_1(S^3)$の『良い』表示（i.e. relationsがconjugate primitive setをなす。）が対応し，これがS^3の判定法になるというW. Hakenの予想に対する反例を

示した。T. Homma - M. Ochiai は，genus 2 の homology sphere M の例をコンピューターで構成し，その中から，homotopy sphere を選び出す過程で，典型的な現象として，$M \approx S^3$ の場合は，$\pi_1(M)$ の表示 $\langle a, b$: generators ; r_1, r_2 : relations $\rangle$ は，一方の relation が他方の relation に word として含まれ，この相互代入を繰り返すことによって，triviality が判定できることを指摘した。この報告では，このことが，ある意味で，genus 一般の場合で成立することを示めす。証明に於いて，最近の S. Suzuki [4] の結果を本質的に使った。当初，D. Myer [3] に依って，genus 2 の場合のみであった。

2. 結果．

定理を述べるために，群の表示について，二，三，定義しよう。a_i $(i = 1, 2, \cdots)$ を generator，r_i $(i = 1, 2, \cdots)$ を relation とし，表示を $\langle a_1, \cdots, a_n ; r_1, \cdots, r_n \rangle$ 等と表わすことにする。

定義 1.（relation の変形）．次の type の relations の変形を simple deformation と呼ぶ。

1) cyclic cancelation.

$$r = a_1 \cdots a_i\, a a^{-1} a_{i+1} \cdots a_n \implies r' = a_1 \cdots a_i\, a_{i+1} \cdots a_n$$

$$r = a a_1 \cdots a_n a^{-1} \implies r' = a_1 \cdots a_n$$

2) cyclic change of order

$$r = a_1 a_2 \cdots a_n \implies r' = a_2 \cdots a_n a_1$$

3) inversion

$$r = a_1 a_2 \cdots a_n \implies r^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \cdots a_1^{-1}$$

4) substitution

$$\begin{cases} r_1 = a_1 a_2 \cdots a_m a_{m+1} \cdots a_n \\ r_2 = a_1 \cdots a_m \end{cases} \implies \begin{cases} r_1' = a_{m+1} \cdots a_n \\ r_2' = r_2 = a_1 \cdots a_m \end{cases}$$

relations $\{r_i\}$ に simple deformation を繰り返して，$\{r_i'\}$ となるとき，$\{r_i\} \xrightarrow{S} \{r_i'\}$ と書くことにする。

定義2.（「相互代入」で trivial）

表示 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n ; r_1, r_2, \cdots, r_n \rangle$ が simply trivial

$\underset{def}{\iff}$ $\{r_i\} \xrightarrow{S} \{a_i\}$

定義3.（表示の equivalence）

(1) 表示 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n ; r_1, r_2, \cdots, r_n \rangle$ が irreducible

$\underset{def}{\iff}$ どの relation r_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ も，cyclic cancel-

-ationができない。

(2) 二つの表示$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n ; r_1, r_2, \cdots, r_n \rangle$, $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n ; r'_1, r'_2, \cdots, r'_n \rangle$ が equivalent

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ それぞれの set of relations $\{r_i\}_{1 \le i \le n}$, $\{r'_i\}_{1 \le i \le n}$ を cyclic cancelation によって, irreducible にしたもの $\{\bar{r}_i\}_{1 \le i \le n}$, $\{\bar{r}'_i\}_{1 \le i \le n}$ が cyclic change of order と inversion によって, 一致する。

以上により, 結果は, 次のように述べられる。記号$\approx$は同相を表わす。

定理　$M \approx S^3$ ならば, M の Heegaard 分解に対応する $\pi_1(M)$ の表示$\langle a_1, \cdots, a_n ; r_1, \cdots, r_n \rangle$に equivalent な表示$\langle a_1, \cdots, a_n ; r'_1, r'_2, \cdots, r'_n \rangle$で simply trivial なものが存在する。

直感的に言えば, $\pi_1(S^3)$の Heegaard 分解による表示は, cancel pair を適当に挟み込んで, relation を一旦ふくらませることによって, 後は, 単調に relations の長さが減少する simple deformations だけによって, trivial となるようにできる。

§2. 準備としての定義と補題

1.　接着空間としての Heegaard 分解

Tを genus nの solid torusとし，T_i $(i=1,2)$をその copyとする。 Mを連結で向き付け可能な3次元多様体とする。

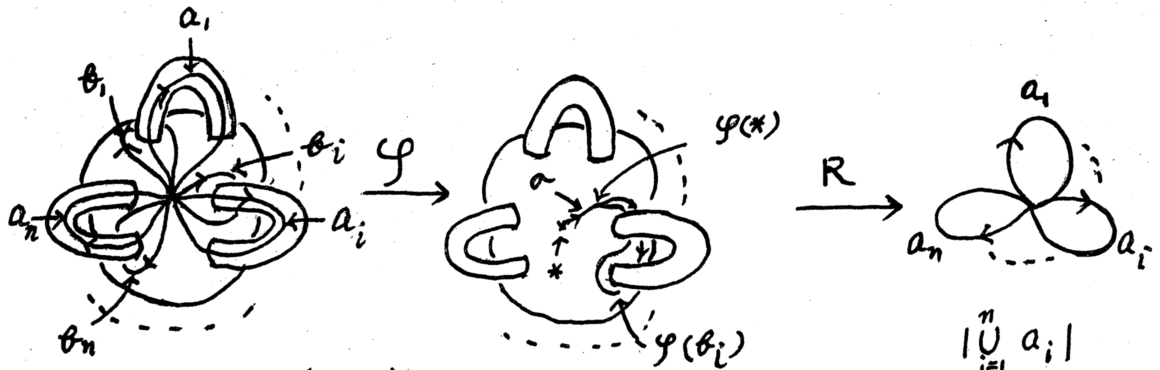
定義4： triple $(M; M_1, M_2)$が Mの genus nの Heegaard分解とは，1) $M_i \approx T$ $(i=1,2)$，2) $M = M_1 \cup M_2$ でかつ $M_1 \cap M_2 = \partial M_1 \cap \partial M_2 = \partial M_1 = \partial M_2$ を満たすことである。

Heegaard分解$(M; M_1, M_2)$に対して，条件1)より，homeomorphism $f_i : T_i \longrightarrow M_i$ $(i=1,2)$が存在し，$\varphi := f_1^{-1} f_2 \mid \partial T_2 : \partial T_2 \longrightarrow \partial T_1$ とすると，接着空間 $T_1 \cup_\varphi T_2$ はMに同相で，更に，$(M; M_1, M_2) \overset{f_1 \cup f_2}{\approx} (T_1 \cup_\varphi T_2 ; T_1, T_2)$ である。必要ならf_1を取り直せば，φは orientation preservingとしてよい。 以下，Heegaard分解の代りに，attaching map φが与えられたとみなし，その対応する $\pi_1(M) \approx \pi_1(T_1 \cup_\varphi T_2)$ の表示を $\pi_1(\varphi)$ で表わそう。

2．$\pi_1(\varphi)$の定義

∂T上に longitude系 $\{a_i\}$，meridian系$\{b_i\}$を図1のようにとる。 $\{a_i, b_i\}$は，$\bigcap_{i=1}^{n} (a_i \cap b_i) = \{*\}$を基点とする $\pi_1(\partial T)$の生成系をなす。(便宜上，loopと loopの homotopy class を同じ記号で表わすことにする。) $R : T \to |\bigcup_{i=1}^{n} a_i|$ をTから longitude系のな

す bouquet への retraction とする。$\pi_1(|\bigcup_{i=1}^{n} a_i|)$ の生成系を同じく，$\{a_i\}_{1\leq i\leq n}$ で表わすことにする。



$T \supset \partial T (= \partial T_2)$　　$\partial T = \partial T_1$　　$|\bigcup_{i=1}^{n} a_i|$ bouquet.

図1.　　図2

$\varphi : \partial T \to \partial T$ を orientation preserving homeomorphism とし，$*$ と $\varphi(*)$ を結ぶ arc を σ とする。（図1，図2参照.）

定義5.　$\pi_1(\varphi) := \langle a_1, \cdots, a_n ; r_1, \cdots, r_n \rangle$，ここに，$r_i = r_i(a_1, a_2, \cdots, a_n) = [R(\sigma \cdot \varphi(b_i) \cdot \sigma^{-1})] \in \pi_1(|\bigcup_{i=1}^{n} a_i|) = \langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$. である。

注意。r_i は，又，$\pi_1(|\bigcup_{i=1}^{n} a_i|) = \langle a_1, \cdots, a_n \rangle \approx \langle a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n ; \prod_{i=1}^{n} a_i b_i^{-1} a_i^{-1} b_i , b_1, \cdots, b_n \rangle \approx \pi_1(\partial T)/_{b_i = 1\ (i=1,\cdots,n)}$ だから，$\bar{r}_i(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n) = [\sigma \cdot \varphi(b_i) \cdot \sigma^{-1}] \in \pi_1(\partial T)$ によって，$r_i = r_i(a_1, \cdots, a_n) := \bar{r}_i(a_1, \cdots, a_n, 1, \cdots, 1)$ と表わせる。

Van Kampen の定理から，この $\pi_1(\varphi)$ は，$\pi_1(T_1 \cup_\varphi T_2)$

の表示である。

補題1. $\pi_1(\varphi)$は, equivalence の範囲で, σの取り方に依らない。

証明. もう一つの arc σ'に対応する relation r_i'は, $r_i' = [R(\sigma' \cdot \varphi(b_i) \cdot \sigma'^{-1})] = [R(\sigma' \cdot \sigma^{-1} \cdot \sigma \cdot \varphi(b_i) \cdot \sigma^{-1} \cdot \sigma \cdot \sigma'^{-1})] = [R(\sigma' \cdot \sigma^{-1})][R(\sigma \cdot \varphi(b_i) \cdot \sigma^{-1})][R(\sigma' \cdot \sigma^{-1})]^{-1} = [R(\sigma' \cdot \sigma^{-1})]\, r_i\, [R(\sigma' \cdot \sigma^{-1})]^{-1}$ だから, r_i, r_i'は, cyclic cancelation による irreducible form は一致。

補題2. $\varphi \underset{isotopic}{\sim} \varphi'$ ならば, $\pi_1(\varphi) \underset{equi}{\approx} \pi_1(\varphi')$。

証明. $\varphi(b_i)$と$\varphi'(b_i)$は free homotopic だから, $[R(\sigma \cdot \varphi(b_i) \cdot \sigma^{-1})]$と$[R(\sigma \cdot \varphi'(b_i) \cdot \sigma^{-1})]$の違いは, inner automorphism だけ。従って, r_iとr_i'は, irreducible form で一致。

2. $\{\varphi \mid T_1 \cup_\varphi T_2 \approx S^3\} / \underset{isotopic}{\sim}$ について

genus n の solid torus T 上の orientation preserving な isotopy group $I^+(T) := \{[h] : \text{isotopy class} \mid h : T \to T$, orientation preserving homeomorphism$\}$ の a finite set of generators は, S. Suzuki [4]により, $\mathcal{Y}_n = \{\rho, \rho_1, \omega_1, \tau_1, \theta_{12}, \xi_{12}\}$ を representative homeomorphisms とする isotopy classes で与えられる。便宜上，$\mathcal{V}_n^{\pm} := \{h, h^{-1} \mid h \in \mathcal{V}_n\}$，$\dot{\mathcal{V}}_n^{\pm} = \{h|\partial T \mid h \in \mathcal{V}_n^{\pm}\}$ とする。

補題3．$T_1 \cup_\varphi T_2 \approx S^3$ ならば，$f_i, g_j \in \dot{\mathcal{V}}_n^{\pm}$ が存在して，$\varphi \underset{\text{isotopic}}{\sim} f_{n_1} \cdots f_1 \varphi_0 g_1 \cdots g_{n_2}$ である。ここに，φ_0 は meridian と longitude を入れ換える standard attaching map である。

証明．homeomorphism $g : T_1 \cup_\varphi T_2 \to S^3$ により，$(S^3; g(T_1), g(T_2))$ は，S^3 の Heegaard 分解を与える。Waldhausen [5] により，分解は一意であるから，homeomorphism $h : (S^3; g(T_1), g(T_2)) \to (T_1 \cup_\varphi T_2; T_1, T_2)$ が存在する。$h_i := hg|T_i$ $(i=1,2)$ とすると，$\varphi = h_1^{-1} \varphi_0 h_2 | \partial T_2$ である。h_i は orientation preserving としてよい。（必要なら，h の取り方を変えれば良い。）よって，S. Suzuki [4] により，$\hat{f}_i, \hat{g}_j \in \mathcal{V}_n^{\pm}$ が存在して，$h_1^{-1} \underset{\text{isotopic}}{\sim} \hat{f}_{n_1} \cdots \hat{f}_1$，$h_2 \underset{\text{isotopic}}{\sim} \hat{g}_1 \cdots \hat{g}_{n_2}$ と表わせる。即ち，$f_i := \hat{f}_i | \partial T$，$g_j := \hat{g}_j | \partial T$ をうる。

4．$\pi_1(\varphi)$ について

補題4．$\dot{\mathcal{V}}_n^{\pm} \ni {}^{\forall} f$，及び，$\varphi_0^{\pm}$ によって induce

された $\pi_1(\partial T)$上の isomorphism $f_\#$ は，次の通り。但し，$\pi_1(\partial T)$ の fixed generators を前図1のようにとる。

1) cyclic translation of handles : $\dot{\rho} = f$

$$\dot{\rho}_\# : \begin{cases} a_i \to a_{i+1} & 1 \leq i \leq n \ (\mathrm{mod}\, n) \\ b_i \to b_{i+1} & 1 \leq i \leq n \ (\mathrm{mod}\, n). \end{cases}$$

$$\dot{\rho}_\#^{-1} : \begin{cases} a_i \to a_{i-1} & 1 \leq i \leq n \ (\mathrm{mod}\, n) \\ b_i \to b_{i-1} & 1 \leq i \leq n \ (\mathrm{mod}\, n) \end{cases}$$

2) Interchanging knobs : $\dot{\rho}_{12} = f$

$$\dot{\rho}_{12\#} \begin{cases} a_1 \to (b_1^{-1}a_1^{-1}b_1a_1)\, a_2\, (b_1^{-1}a_1^{-1}b_1a_1)^{-1} \\ a_2 \to a_1 \\ a_i \to a_i & 3 \leq i \leq n \\ b_1 \to (b_1^{-1}a_1^{-1}b_1a_1)\, b_2\, (b_1^{-1}a_1^{-1}b_1a_1)^{-1} \\ b_2 \to b_1 \\ b_i \to b_i & 3 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\dot{\rho}_{12\#}^{-1} \begin{cases} a_1 \to a_2 \\ a_2 \to (a_2^{-1}b_2^{-1}a_2b_2)\, a_1\, (a_2^{-1}b_2^{-1}a_2b_2)^{-1} \\ a_i \to a_i & 3 \leq i \leq n \\ b_1 \to b_2 \\ b_2 \to (a_2^{-1}b_2^{-1}a_2b_2)\, b_1\, (a_2^{-1}b_2^{-1}a_2b_2)^{-1} \\ b_i \to b_i & 3 \leq i \leq n \end{cases}$$

3) Twisting a knob : $\dot{\omega}_1 = f$

$$\dot{\omega}_{1\#} \begin{cases} a_1 \longrightarrow a_1^{-1}(b_1^{-1}a_1 b_1 a_1) \\ a_i \longrightarrow a_i & 2 \le i \le n \\ b_1 \longrightarrow a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 \\ b_i \longrightarrow b_i & 2 \le i \le n \end{cases}$$

$$\dot{\omega}_{1\#}^{-1} \begin{cases} a_1 \longrightarrow b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 \\ a_i \longrightarrow a_i & 2 \le i \le n \\ b_1 \longrightarrow b_1^{-1} a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 b_1 \\ b_i \longrightarrow b_i & 2 \le i \le n \end{cases}$$

4) *Twisting a handle* : $\dot{\tau}_1 = f$.

$$\tau_{1\#} \begin{cases} a_1 \longrightarrow b_1^{-1} a_1 \\ a_i \longrightarrow a_i & 2 \le i \le n \\ b_i \longrightarrow b_i & 1 \le i \le n. \end{cases}$$

$$\tau_{1\#}^{-1} \begin{cases} a_1 \longrightarrow b_1 a_1 \\ a_i \longrightarrow a_i & 2 \le i \le n \\ b_i \longrightarrow b_i \end{cases}$$

5). *Sliding a handle* : $\dot{\theta}_{12}$, $\dot{\xi}_{12} = f$.

$$\dot{\theta}_{12\#} \begin{cases} a_1 \longrightarrow a_1 b_2^{-1} a_2^{-1} b_2 \\ a_i \longrightarrow a_i & 2 \le i \le n \\ b_i \longrightarrow b_i & i \neq 2. \\ b_2 \longrightarrow a_2 b_2 (a_1^{-1} b_1 a_1)(b_2^{-1} a_2^{-1} b_2) \end{cases}$$

$$\dot{\theta}_{12\#}^{-1}\begin{cases} a_1 \longrightarrow b_1 a_1 (b_2^{-1} a_2 b_2)(a_1^{-1} b_1^{-1} a_1) \\ a_i \longrightarrow a_i \quad 2 \leq i \leq n \\ b_i \longrightarrow b_i \quad i \neq 2 \\ b_2 \longrightarrow b_2 a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 \end{cases}$$

$$\dot{\xi}_{12\#}\begin{cases} a_1 \longrightarrow b_1 a_1 b_2^{-1} a_2^{-1} b_2^{-1} a_2 b_2 a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 \\ a_2 \longrightarrow a_2 b_2 a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 b_2^{-1} \\ a_i \longrightarrow a_i \quad 3 \leq i \leq n \\ b_i \longrightarrow b_i \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\dot{\xi}_{12\#}^{-1}\begin{cases} a_1 \longrightarrow a_1 b_2^{-1} a_2^{-1} b_2 a_2 b_2 \\ a_2 \longrightarrow b_2^{-1} a_2 b_2 a_1^{-1} b_1 a_1 b_2^{-1} a_2^{-1} b_2 a_2 \\ a_i \longrightarrow a_i \quad 3 \leq i \leq n \\ b_i \longrightarrow b_i \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

6) standard attaching map for S^3 : φ_0
(cf. [3] の map μ)

$$\varphi_{0\#}\begin{cases} a_i \longrightarrow b_i \quad 1 \leq i \leq n \\ b_i \longrightarrow b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\varphi_{0\#}^{-1}\begin{cases} a_i \longrightarrow a_i^{-1} b_i a_i \quad 1 \leq i \leq n \\ b_i \longrightarrow a_i \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

この補題から，次が成り立つ。

系 1. 1) $\{f_\#(a_i), b_j\}_{1 \leq i, j \leq n} \xrightarrow{S} \{a_i, b_j\}_{1 \leq i, j \leq n}$
2) $\{f_\#(b_i)\}_{1 \leq i \leq n} \xrightarrow{S} \{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$. , 3) (i) $\{\varphi_{0\#}(a_i)\}_{1 \leq i \leq n} = \{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$

$\{\varphi_{0\#}^{-1}(b_i)\} = \{a_i\}$, (ii) $\{\varphi_{0\#}(b_i)\} \xrightarrow{S} \{a_i\}$, $\{\varphi_{0\#}^{-1}(a_i)\} \xrightarrow{S} \{b_i\}$.

この系1を用いて，合成による simply trivial の継承性について以下が成り立つ。

補題5. orientation preserving homeomorphism $\varphi : (\partial T, *) \to (\partial T, *)$ は次を満たす。$[\varphi(b_i)]$ を表わす $\pi_1(\partial T)$ の fixed generators $\{a_i, b_j\}_{1 \le i, j \le n}$ による word $r_i(a_1, \cdots a_n, b_1, \cdots, b_n)$ が存在して，$\{r_i(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)\}_{1 \le i \le n} \xrightarrow{S} \{a_i\}_{1 \le i \le n}$ となる。このとき，任意の $f \in \mathcal{V}_n^{\pm}$ に対して，homeomorphism $\varphi_0 f \varphi_0^{-1} \varphi :$ $(\partial T, *) \to (\partial T, *)$ も，又，同じ性質をもつ。

証明. 今，$\hat{f} = \varphi_0 f \varphi_0^{-1}$ とおき，induced isomorphism を $\hat{f}_\#$ とする。仮定より，$[\varphi(b_i)] = r_i(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$ だから，各 $\hat{f}_\#(a_i)$，$\hat{f}_\#(b_j)$ を fixed した word で表わせば，$[\hat{f} \cdot \varphi(b_i)] = r_i(\hat{f}_\#(a_1), \cdots, \hat{f}_\#(a_n), \hat{f}_\#(b_1), \cdots, \hat{f}_\#(b_n))$ $(= r_i'(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$ とおく。$)$ をうる。simple deformation は，homomorphism で不変だから，$\{r_i'(a_1, \cdots a_n, b_1, \cdots, b_n)\} \xrightarrow{S} \{\hat{f}_\#(a_i)\}$ である。更に，$\hat{f}_\# = \varphi_{0\#} f_\# \varphi_{0\#}^{-1}$ だから，系1より，$\{\hat{f}_\#(a_i)\} \xrightarrow{S} \{\varphi_{0\#} f_\# (b_i)\} \xrightarrow{S} \{\varphi_{0\#}(b_i)\} \xrightarrow{S} \{a_i\}$。

系2. $g_i \in \mathcal{V}_n^{\pm}$ とすると，$\pi_1(\varphi_0 g_1 \cdots g_m)$ は，*simply trivial up to equivalence*。

証明．今，$[\varphi_0 g_2 \cdots g_m(b_i)]$ を表わす word $r_i(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$ が存在して，$\{r_i(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)\}_{1\leq i\leq n} \overset{S}{\rightarrow} \{a_i\}_{1\leq i\leq n}$ であれば，補題5により，$(\varphi_0 g_1 \varphi_0^{-1})\varphi_0 g_2 \cdots g_m = \varphi_0 g_1 \cdots g_m$ についても，$[\varphi_0 g_1 \cdots g_m(b_i)]$ を表わす word $r_i'(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$ が存在し，$\{r_i'(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)\} \overset{S}{\rightarrow} \{a_i\}$，ところで，定義5の注意より，$\pi_1(\varphi_0 g_1 \cdots g_m) \underset{equi}{\approx} \langle a_1, \cdots, a_n; r_1'(a_1, \cdots, a_n, 1, \cdots, 1), \cdots, r_n'(a_1, \cdots, a_n, 1, \cdots, 1) \rangle$ で，これは *simply trivial*。$m=0$ のとき，系1より，$[\varphi_0(b_i)]$ を表わす word $r_i(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$ として $\varphi_{0\#}(b_i)$ をとれば，$\{r_i(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)\} \overset{S}{\rightarrow} \{a_i\}$ であるから，帰納法により，$m \geq 1$ で成立。又，$m=0$ のときも，$\pi_1(\varphi_0) \underset{equi}{\approx} \langle a_1, \cdots, a_n; r_1(a_1, \cdots a_n, 1, \cdots, 1), \cdots, r_n(a_1, \cdots, a_n, 1, \cdots, 1) \rangle$ は *simply trivial* で成立。

補題6. *orientation preserving homeomorphism* $\varphi : (\partial T, *) \rightarrow (\partial T, *)$ は次を満たす。$[\varphi(b_i)] \in \pi_1(\partial T)$ を表わす word $r_i(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$ $(i=1, \cdots, n)$ が存在して，$\{r_i(a_1, \cdots, a_n, 1, \cdots, 1)\} \overset{S}{\rightarrow} \{a_i\}$ である。このとき，$\mathcal{V}_n^{\pm} \ni {}^{\forall} f$ に対して，*homeomorphism*

$f\varphi$も同じ性質をもつ。

証明. $[f\varphi(b_i)]$を表わすword $r_i'(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n)$として，$r_i(f_\#(a_1),\cdots,f_\#(a_n),f_\#(b_1),\cdots,f_\#(b_n))$をとると，$f$はextension $\hat{f}:T\to T$をもつから，$b_i=1$ならば$f_\#(b_i)=1$，又，$f_\#$はhomomorphismだから，$\{r_i(f_\#(a_1),\cdots,f_\#(a_n),1,\cdots,1)\}\xrightarrow{S}\{f_\#(a_i)\}$，更に系1より$\{f_\#(a_i),b_j\}\xrightarrow{S}\{a_i\}$だから，$\{r_i'(a_1,\cdots,a_n,1,\cdots,1)\}\xrightarrow{S}\{a_i\}$。

この補題から，次の系は容易にでる。

系3. $\pi_1(\varphi)$がsimply trivial up to equivalenceならば，$\mathcal{U}_n^{\pm}\ni{}^{\forall}f$に対して，$\pi_1(f\varphi)$も然り。

§3. 定理の証明.

定理の証明. $S^3\approx T_1\cup_\varphi T_2$だから，補題3より$f_i,g_j\in\mathcal{U}_n^{\pm}$が存在し，$\varphi\underset{isotopic}{\simeq}f_{n_1}\cdots f_1\varphi_0 g_1\cdots g_{n_2}$となる。補題2より $\pi_1(\varphi)\underset{equi.}{\cong}\pi_1(f_{n_1}\cdots f_1\varphi_0 g_1\cdots g_{n_2})$ところで，系2より $\pi_1(\varphi_0 g_1\cdots g_{n_2})$はsimply trivial up to equivalence，よって，系3より $\pi_1(f_{n_1}\cdots f_1\varphi_0 g_1\cdots g_n)$も然り。（証明終）

§4. 検討.

上記の定理は，一種の存在定理である。 simply trivial をより強めて，simple deformation を行う順序について，まず，cyclic cancelation によって irreducible にしてから，他の変形をすることにし，(これを strongly simply trivial と呼ぼう。) up to equivalence によって relations を一旦，長くするのを，認めぬ形 として，

問題． $S^3 \approx T_1 \cup_\varphi T_2$ ならば，$\pi_1(\varphi)$ の irreducible form は strongly simply trivial か。

は，興味深い。肯定的ならば，S^3 であるための必要条件の能率的な algorithm となる。否定的ならば，上記の定理が，この方向での best possible となる。

参考文献．

[1] Birman - Hilden : Heegaard splittings of branched coverings of S^3. Trans. A. M. S. vol. 213 (1975) P315 − 352.

[2] H. Kamuro : 種数 2 の closed orie. 3-mfd の基本群の特徴づけ． T. I. T. vol 2. P. 67 −.

[3]. D. Myer : Homeomorphisms on the solid

double torus. Can. J. 1975. P797-804.
[4] S. Suzuki: On Homeomorphisms of a 3-dimensional handle-body. to appear in Can. J. 及び, 本講究録.
[5] F. Waldhausen: Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre, Topology 7. (1968) P197-203.