数理解析研究所講究録
第 297 巻 1977 年 92-99



# $S^3$の中の surface について

東大　理　　山崎正之

$g: V \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ を $\mathbb{Z}_2$上の2次形式とすると、$g$に随伴する双一次形式( , )が $(x,y) = g(x+y) - g(x) - g(y)$ により定まる。$R = \{x \in V ; (x,y) = 0 \text{ for } \forall y \in V\}$ とおくとき $g$の Arf invariant が定まるためには $g|R \equiv 0$が必要十分である。( [1] p.56 III.1.14 Theorem. )

今、$S^3$の中の link をひとつとり、その Seifert surface M を固定したとき、上のVとして $H_1(M; \mathbb{Z}_2)$, $g$として self-linking number (mod 2), ( , )として intersection pairing (mod 2)をとることにする。$g|R \equiv 0$ という条件はこの linkが proper link ( [2] p.546 )であるという条件に一致する。従って linkが properのとき、Mに対して Arf invariantが定義されるが、これはMのとり方によらずに定まる。

$g|R \not\equiv 0$ならば Arf invariantは well-defined でないという事実を翻訳して次の定理をうる。

定理　(i) $M, M' (\in \mathcal{M}_{g,k})$ が $S^3$ の中の２つの *non-zero type* の *surface* であるとき、$M$ と $M'$ が互いに *regularly homotopic* であるためには、$M$ と $M'$ が同じ *type* を持つことが必要十分である.

(ii) $M, M' (\in \mathcal{M}_{g,k})$ が $S^3$ の中の２つの *zero type* の *surface* であるとき、$M$ と $M'$ が互いに *regularly homotopic* であるためには、$M$ と $M'$ が同じ Arf *invariant* を持つことが必要十分である。

(但し、$g \geqq 0$　$k \geqq 1$ )

## §1　定義

定義１　$\overline{M}$ をジーナス $g$ の２次元向き付け可能閉多様体から $k$ 個の開円板をとりのぞいたものとする。このとき

$$\mathcal{M}_{g,k} \underset{def.}{=} \{ f(\overline{M}) \subset S^3 \ ; \ f : \overline{M} \longrightarrow S^3 : \textit{imbedding} \}$$

とする。$\mathcal{M}_{g,k}$ の元を *surface* とよぶ.

定義２　$M \in \mathcal{M}_{g,k}$ , $\partial M = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_k$ とする。

$M$ が $k$ *type* の *surface* であるとは

$$\# \{ i \ ; \ L_M(c_i, c_i) \equiv 1 \pmod 2 \} = 2k$$

であることとする. 但し　$c_i = [\gamma_i] \in H_1(M; \mathbb{Z})$ であり、

$L_M( \ , \ ) : H_1(M; \mathbb{Z}) \otimes H_1(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ は *linking pairing* である。$\mathbb{Z}_2$ 係数にしたものを $\widetilde{L}_M( \ , \ ) : H_1(M; \mathbb{Z}_2) \otimes H_1(M; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ とか $\widetilde{c}_i$ のように $\sim$ をつけてかく。

注意. $\tilde{c}_1 + \cdots + \tilde{c}_k = 0$ であるから

$$\tilde{L}_M(\tilde{c}_1, \tilde{c}_1) = \tilde{L}_M(\tilde{c}_2 + \cdots + \tilde{c}_k,\ \tilde{c}_2 + \cdots + \tilde{c}_k)$$
$$= \tilde{L}_M(\tilde{c}_2, \tilde{c}_2) + \cdots + \tilde{L}_M(\tilde{c}_k, \tilde{c}_k)$$
$$\therefore\ \tilde{L}_M(\tilde{c}_1, \tilde{c}_1) + \tilde{L}_M(\tilde{c}_2, \tilde{c}_2) + \cdots + \tilde{L}_M(\tilde{c}_k, \tilde{c}_k) = 0$$

従って $\#\{i ; L_M(c_i, c_i) \equiv \tilde{L}_M(\tilde{c}_i, \tilde{c}_i) \equiv 1 \pmod 2\}$ は偶数となり、$k$ は $[\frac{k}{2}]$ 以下の整数である.

定義3. $M, M' \in \mathcal{M}_{g,k}$ とする. $M$ が $M'$ に *regularly homotopic* とは、
- 普通の意味での *regular homotopy* $H : \bar{M} \times I \longrightarrow S^3$ が存在し、
- $H|\bar{M} \times \{0\}$, $H|\bar{M} \times \{1\}$ は *imbedding* になっており
- $H(\bar{M} \times \{0\}) = M$ $\quad H(\bar{M} \times \{1\}) = M'$

であることをいう.

定義4. *surface* $M$ の *Arf invariant* $a(M)\ (\in \mathbb{Z}_2)$ とは、$q(x) = \tilde{L}_M(x, x)$ によって定まる2次形式 $q : H_1(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ の *Arf invariant* のことである.

注意. この場合 $\tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_k$ によって生成される $H_1(M; \mathbb{Z}_2)$ の部分空間が $R$ であるから、*surface* $M$ の *Arf invariant* が *well-defined* であるための必要十分条件は、$M$ が $0$-*type* であること.

## §2　定理の証明

補題1．$M$は$M'$に *regularly homotopic* であり、$H$を$M$と$M'$の間の *regular homotopy* とする。このとき

$$\tilde{L}_M(\tilde{x},\tilde{x}) = \tilde{L}_{M'}\left((h_1\circ h_0^{-1})_*\tilde{x},\ (h_1\circ h_0^{-1})_*\tilde{x}\right) \quad \text{for } \forall \tilde{x}\in H_1(M;\mathbb{Z}_2)$$

（但し，$h_0 = H|\bar{M}\times\{0\}$　$h_1 = H|\bar{M}\times\{1\}$）

証明は、この補題が$g=0$, $h=2$のとき、すなわち$M$, $M'$が$S^3$の中の帯になっている時正しいこと（[3]）を用いれば容易に示される。

補題2　(i) $M$が$M'$に *regularly homotopic* とすると、$M$と$M'$は同じ *type* を持つ。

(ii) 0-type の *surface* $M$, $M'$が *regularly homotopic* とすると$a(M) = a(M')$である。

証明）(i) $\partial M = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_h$　$\partial M' = \gamma_1' \cup \cdots \cup \gamma_h'$ とする．番号を適当につけかえて．$(h_1\circ h_0^{-1})(\gamma_i) = \gamma_i'$ $(i=1,\cdots,h)$と仮定してよい．$\tilde{c}_i = [\gamma_i] \in H_1(M;\mathbb{Z}_2)$　$\tilde{c}_i' = [\gamma_i'] \in H_1(M';\mathbb{Z}_2)$とすると補題1により、$\tilde{L}_M(\tilde{c}_i,\tilde{c}_i) = \tilde{L}_{M'}(\tilde{c}_i',\tilde{c}_i')$　$(i=1,\cdots,h)$．

従ってMとM'は同じ *type* をもつ．　(q.e.d.)

(ii) $\{\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \cdots, \tilde{a}_g, \tilde{b}_g, \tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_{h-1}\}$を$H_1(M;\mathbb{Z}_2)$の *symplectic basis* とする．

$\tilde{a}_i' = (h_1 \circ h_0^{-1})_* \tilde{a}_i \qquad \tilde{b}_i' = (h_1 \circ h_0^{-1})_* \tilde{b}_i \qquad i=1,\cdots,g$

$\tilde{c}_j' = (h_1 \circ h_0^{-1})_* \tilde{c}_j \qquad j=1,\cdots,r-1.$

とおくと、$\{\tilde{a}_1', \tilde{b}_1', \cdots, \tilde{a}_g', \tilde{b}_g', \tilde{c}_1', \cdots, \tilde{c}_{r-1}'\}$ は $H_1(M'; \mathbb{Z}_2)$ の *symplectic basis* である。補題1により、

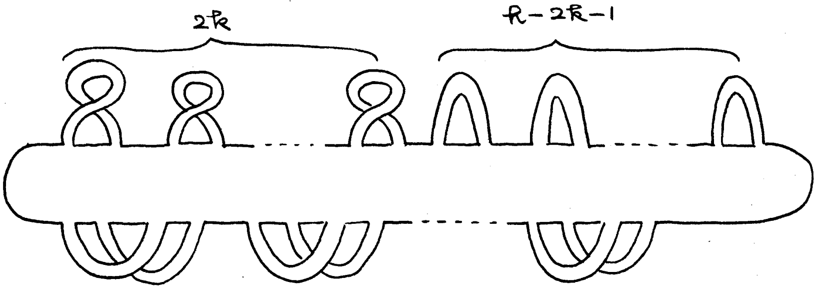
$$\tilde{L}_M(\tilde{a}_i, \tilde{a}_i) = \tilde{L}_{M'}(\tilde{a}_i', \tilde{a}_i')$$

$$\tilde{L}_M(\tilde{b}_i, \tilde{b}_i) = \tilde{L}_{M'}(\tilde{b}_i', \tilde{b}_i')$$

従って
$$\begin{aligned} a(M) &= \sum_{i=1}^{g} \tilde{L}_M(\tilde{a}_i, \tilde{a}_i)\, \tilde{L}_M(\tilde{b}_i, \tilde{b}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{g} \tilde{L}_{M'}(\tilde{a}_i', \tilde{a}_i')\, \tilde{L}_{M'}(\tilde{b}_i', \tilde{b}_i') \\ &= a(M'). \end{aligned}$$
(q.e.d.)

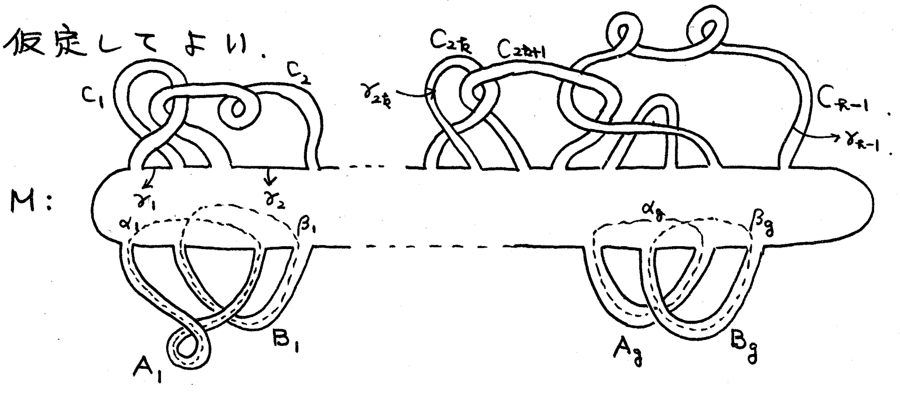
定理の証明.

(i) $M$ を $k(>0)$ type の *surface* とする。$\tilde{M}$ を図のような、標準的な $k$ type の *surface* とする。$M$ が $\tilde{M}$ に *regularly homotopic* であることをいえばよい。

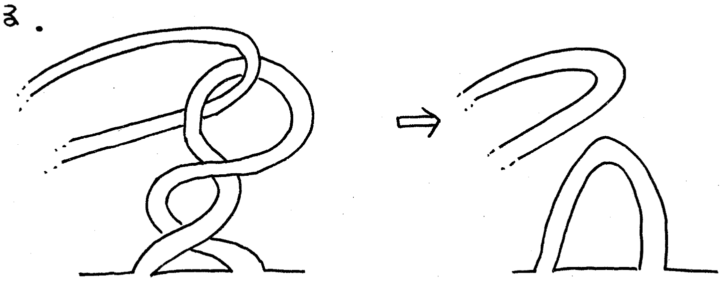
$\tilde{M}$ :



$M$ は disc に帯 $A_1\ B_1 \cdots A_g\ B_g\ C_1 \cdots C_{r-1}$ がついているものとおもうことができる。帯 $A_i(B_i, C_j)$ は曲線 $\alpha_i(\beta_i, \gamma_j)$ $i=1,\cdots,g$ $j=1,\cdots,r-1$ を持つ。$\alpha_i, \beta_i, \gamma_j$ によって表現される $H_1(M;\mathbb{Z})$ の

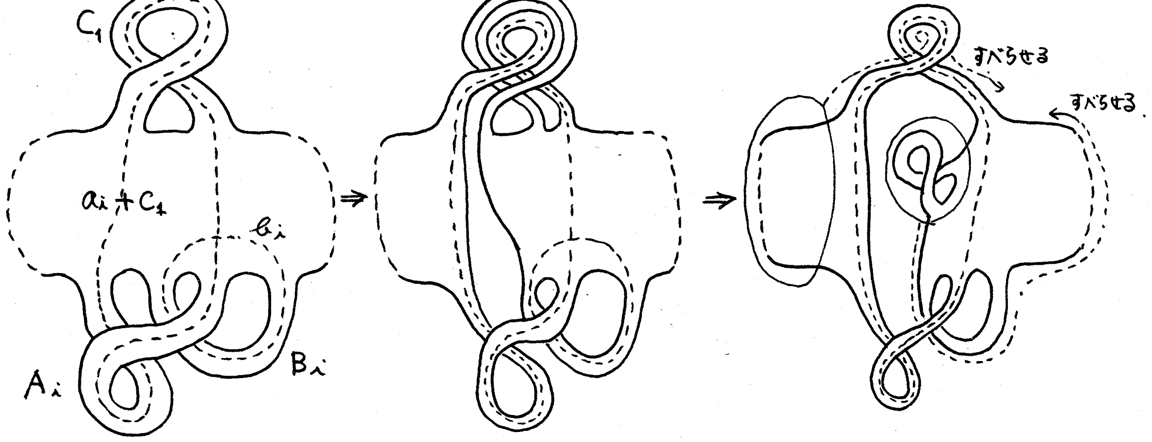
元を $a_i, b_i, c_j$ とかく．$\tilde{M}$ にあわせるために $L_M(c_i, c_i) \equiv 1$ $(\mathrm{mod}\ 2)$ for $i=1, \cdots, 2k$. $L_M(c_i, c_i) \equiv 0$ $(\mathrm{mod}\ 2)$ for $i=2k+1, \cdots, k-1$ と仮定してよい．

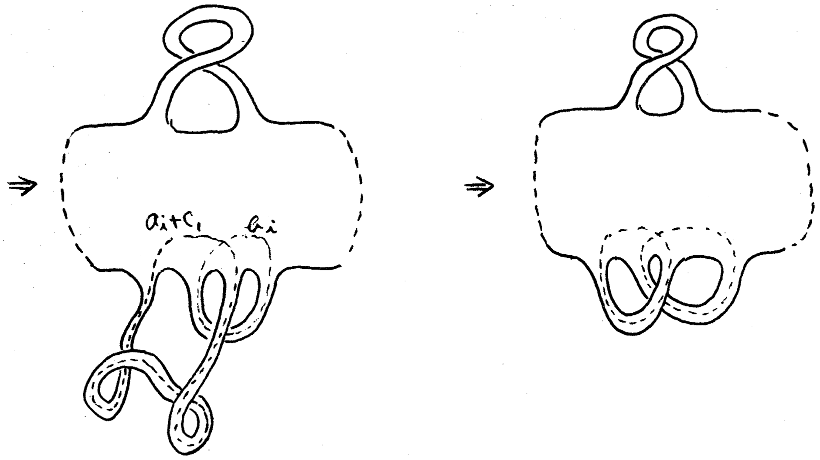



regular homotopy を用いて　からみあっている帯は，はずしていく．またおのおのの帯の self-linking も 0 または 1 にする．



今ある帯 $A_i$ において $L_M(a_i, a_i) = 1$ であったとする．新しい symplectic basis $\{a_1, b_1 \cdots\ a_i + c_1, b_i, \cdots\ a_g, b_g, c_1, \cdots, c_{k-1}\}$ をとり，これに即した帯分解の変更を下図のようにおこなう．





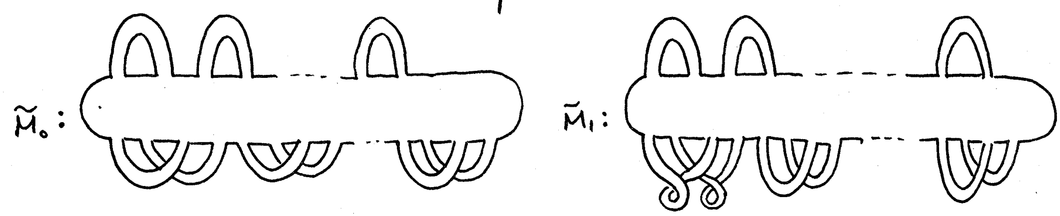

これをくりかえすことによって新しいsurface $M'$では

$$L_{M'}(a_i, a_i)=0 \quad L_{M'}(b_i, b_i)=0$$

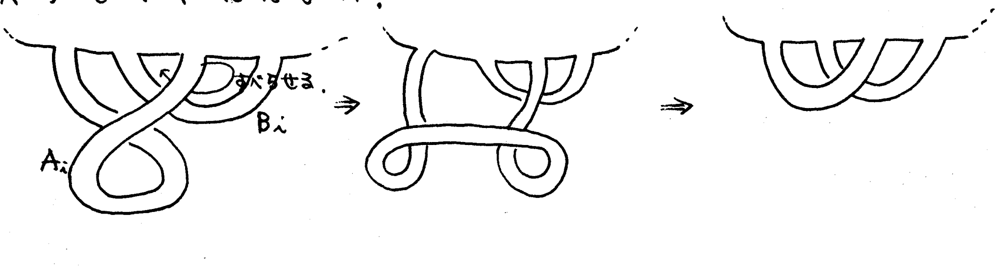
にできる。こうしてできた$M'$は標準のsurface $\tilde{M}$に isotopicである。

(q.e.d)

(ii) 証明は(i)の場合と全く同様であるが、唯一異なるのは、帯 $A_i$ ($B_i$) のself-linkingを帯 $C_1$ のそれで打ち消すことができない点である。標準surface $\tilde{M}_0$, $\tilde{M}_1$ は次のとうりとする。




$L_M(a_i, a_i)=1$ $L_M(b_i, b_i)=0$ なる $i$ がある時は、帯 $A_i$ を $B_i$ に沿ってすべらせてやればよい。



$L_M(a_i, a_i)=1 \quad L_M(b_i, b_i)=1 \quad L_M(a_j, a_j)=1 \quad L_M(b_j, b_j)=1$

となる $i, j$ $(i \neq j)$ があったときは $a_i, b_i, a_j, b_j$ のかわりに

$$a_i' = a_i + b_i + a_j + b_j \qquad b_i' = a_i + b_i + b_j$$

$$a_j' = a_i - a_j \qquad b_j' = b_i + a_j$$

として新しい symplectic basis をとり、新しい帯分解を行ない (i) と同様にして surface $M'$ で

$$L_{M'}(a_i') = L_{M'}(a_j') = L_{M'}(b_i') = L_{M'}(b_j') = 0$$

他はそのまま

なものをつくる。

これらをくりかえせば、$a(M)=0$ のときは $\tilde{M}_0$ に、$a(M)=1$ のときは $\tilde{M}_1$ に isotopic な surface $M''$ を得る。 (q.e.d.)

注意 $a(M)=0$ (1) は $L_M(a_i, a_i) \equiv L_M(b_i, b_i) \equiv 1 \pmod 2$ なる $i$ が偶数個(奇数個)あることを意味する。

## 参考


[1] W. Browder : Surgery on Simply-Connected Manifolds ; Springer (1972)

[2] R. A. Robertello : An Invariant of Knot Cobordism ; Comm. Pure Appl. Math. vol 18 543-555 (1965)

[3] 加藤十吉 : 帯のトポロジー ; 数解研講究録 243. (多様体の低余次元位置問題について) 88-96 (1975)