数理解析研究所講究録
第 310 巻 1977 年 72-82

電卓の計算法について

電通大 情報数理工学科
小林光夫

1 はじめに

近頃の電卓の普及はめざましい．機能は，かつてより格段に優れ，超小型で，メモリ付き，関数付きのものが，どこでも手軽に使えるようになった．反面，その使用法，計算法など，ソフトウェア的側面については，いま一歩の感がある．電卓に付属の手引書なども，いくつかの数値についての計算例を並べて，一般の場合の計算法を推測させる方法（大部分はこれ）か，電卓に内蔵されているレジスタを陽に示し，その間のデータの移動を記す方法の二通りである．前者は，分り易いが表現にあいまいさがあり，後者は，機能を厳密に表わすが，ハードウェアぎらいの人々はなじめない．

この小文では，操作法のある簡単な記述の仕方を提案し，それを，電卓の機能の定義，算法の記述，操作の正しさを示すことなどに適用してみる．

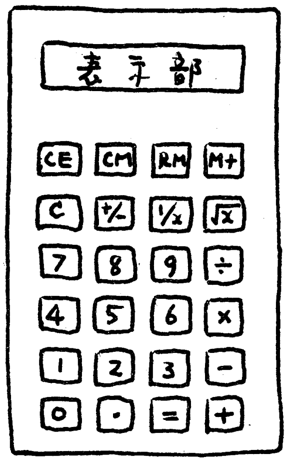
2 記法

電卓には，いくつかのキーをそなえた操作部と，計算結果を示す表示部，それに，途中結果を貯えるメモリなどがある．人は，表示部の数値を見，メモリの内容を考慮し，キーを押す．表示部の数値やメモリの内容などを △ で，キー操作を Φ であらわし，この過程をAN記法風に書けば，次のようになる：

<電卓の操作> ＝ [△](Φ ∘∘∘ △)∘∘∘ △

これを，構文としてとらえるだけでなく，意味を付与して考えてみたい．すなわち，最後の △ を，それより手前の△やΦの列を前提としたときの，帰結と考えるわけである．いいかえれば，表示（やメモリ）△を見（考え）ては，いくつかの操作Φを行なうことを繰り返し，最後に得られた△が，望む結果であると読もうというのが，私の提案である．

3 電卓の機能の定義



右のような，現在最もよく普及していると思われる，1メモリ付きの電卓を例にとり，操作法を示すことによって，その機能を定義してみよう．

表示部の数値をx，メモリの内容をa

とし，Δの具体的表現を

$$\{x\ ;\ A\}$$

と書く．適宜，省略記法

$\{x\}$ ：Aを考えなくてよいとき

や

$\{;A\}$ ：xを考えなくてよいとき

を使うことにする．

＜単純操作＞

A1：（消去）　$C\{0\}$

キーCを押すと表示が0になることを示す．

A2：（入力）数字キーや小数点キーで数値nを入力する操作をnで表わす：

$$n\{n\}$$

数値を入力すると，それが表示されることを意味する．

A3：（単項演算）μを，+/-，1/x，$\sqrt{x}$ のいずれかの操作とする：

$$\{v\}\mu\{\mu v\}$$

vが表示されているとき，μを押すと，μvが表示されることを意味する．例えば，

$$\{3.14\}+/-\{-3.14\}$$

などの操作である．

<複合操作>

φやψを，演算＋，－，×，÷のいずれかとする．また，x，yなどで，操作nまたはRMまたはそれらの結果に単項演算を施して得られる被演算子の設定を表わそう．

A4:（計算開始）　$C\ x\ \varphi\ \{x\}$

消去をし，被演算子xを設定してから，φを押しても表示はxのままであることを示す．

A5:（計算続行）　$\varphi\{v\}\ x\ \psi\ \{v\varphi x\}$

前にφを押し，vが表示されているときに，$x\psi$と操作を行なうと，前の演算φが実行されることを意味する．（したがって，ψもまた憶えられる．）

A6:（結果表示）　$\varphi\{v\}\ x = \{v\varphi x\}$

A5と意味はほぼ同様である．

A7:（連続計算）　$=\{v\}\ \varphi\ \{v\}$

＝を押したとき，結果vが表示され；それを確認した後さらに計算を続行したいことがある．これは，それを可能にする操作法である．

<省略操作>

たいていの電卓では，キーを押す回数を少なくするため(?)に，操作の省略ができるようになっている．今まで示した操作は，どの電卓にも共通のものであったが，この省略操作

は，電卓によって異なることがある．

Δや亜の列を Σ, Σ' とするとき，

$$\Sigma \Rightarrow \Sigma'$$

で，「Σ は Σ' でおきかえることができる」あるいは，「Σ は Σ' と同等である」ことを表わすことにし，我々の省略操作法を次のように定めよう．

A8:（次の計算開始）

$$= x \varphi \Rightarrow C x \varphi$$

=が押されて結果が表示されているときに，$x\varphi$ と操作した場合は，$Cx\varphi$ と操作したことと同じである．

A9:（平方など）

$$\varphi \{v\} = \Rightarrow \varphi \{v\} v =$$

φ 操作後 v が表示されているときに，いきなり = を押すと，それは v を入力してから = を押したことと同等である．この操作は，平方を作るときなどに便利に使える．

A10:（定数計算）

$$\varphi y = \{v\} x = \Rightarrow \varphi y = \{v\} x \varphi y =$$

前の 'φy' の効果が残っていることを表わす．A8を用いれば，次とも同等となる：

$$\cdots C x \varphi y = \{x \varphi y\}$$

この性質は，機種によって違いが最も大きい．ある機種では，φを＋，－，÷にしたときだけ成立ち，他の機種では，÷についてのみ成立つことがある．この法則の成立しない場合には，次のA10′が成立つことはある：

A10′:
$$x\,\psi\,y = \{v\}\,z = \;\Rightarrow\; x\,\psi\,y = \{v\}\,x\,\psi\,z =$$

すなわち，'$x\psi$'の効果が残っている．

A11:（べきなど）

$$\varphi\,y = \{v\} = \;\Longrightarrow\; \varphi\,y = \{v\}\,v =$$

したがって，A10を用いれば，次と同等である：

$$\cdots C\,v\,\varphi\,y = \{v\,\varphi\,y\}$$

A10が成立たない場合や，A10′が成立つ場合には，もちろん別の解釈となることに注意．

〈メモリ演算〉

A12:（メモリ消去）　CM $\{;0\}$

CMを押すと，メモリの内容が0になる．他は不変．

A13:（メモリ呼出し）　$\{;a\}$ RM $\{a\}$

メモリの内容がaのとき，RMを押すと，表示がaとなる．メモリは不変．

A14:（メモリ加算）　$\{v;a\}$ M+ $\{;a+v\}$　表示不変．

〈その他の操作〉

A15:（入力訂正）　n CE $\{0\}$

・たいていの電卓のもっている入力訂正の機能である。編集機能の一種であり、電卓の操作性の評価のさいには重要であるが、算法を考えるさいには、直接関係しない。

4　いくつかの計算例

以上のように、電卓のもつ基本的性質が定義できれば、ある操作によってどのような結果が得られるかを調べたり、算法をプログラムとしてまとめておくことに利用できる。先のA1からA14を仮定し、いくつかの計算例を示そう。

〈例1〉　$C\ x\ \varphi\ y\ \psi\ z = \{(x\ \varphi\ y)\ \psi\ z\}$;

これは、たとえば、$C\ 3 + 2 \times 4 = \{20\}$ となることを意味している。この結果の正しいことは、次のようにして分る：

$C\ x\ \varphi\ \{x\}$　(A4)

$y\ \psi\ \{x\ \varphi\ y\}$　(A5)

$z = \{(x\ \varphi\ y)\ \psi\ z\}$　(A6)

〈例2（$2x^2$ の計算）〉

$$C\ x \times = + = \{2x^2\};$$

∵) $\underline{C\ x \times}\{x\}$ (A4)

$\underline{\qquad\qquad}=$

$\Downarrow$ (A9)

$\underline{\times\{x\}x =}\{x^2\}$ (A6)

$\underline{\qquad\qquad} + \{x^2\}$ (A7)

$\underline{\qquad\qquad}=$

$\Downarrow$ (A9)

$\underline{+\{x^2\}x^2 =}\{2x^2\}$ (A6)

<例3（等差数列 $a_n = a+(n-1)d$ の計算）>

(1) $C\ a + \{a\}d\{d\};$

(2) $\mathbf{for}\ i := 2\ \mathbf{to}\ n\ \mathbf{do} = \{a_i\};$

∵) $i=2$ のとき，

$C\ a + \{a\}d = \{\underbrace{a+d}_{=a_2}\}$ (A4, A6)

$i \leq k$ までの操作 $\Rightarrow$ $C\ a_{k-1} + \{a_{k-1}\}d = \{a_k\}$ とすれば，

$i = k+1$ のとき

$C\ a_{k-1}\ \underline{+ d = \{a_k\} =}$

$\Downarrow$ (A11)

$\underline{C\ a_k + d =}\{a_{k+1}\}$ (A4, A6)

例2，例3は有限操作を利用しているので，電卓によっては当然やり方が異なる場合もあるので，注意する.

<例4 (等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ の計算)>

(1) C $a \times \{a\}$ r $\{r\}$;

(2) <u>for</u> $i:=2$ <u>to</u> n <u>do</u> $= \{a_i\}$;

<例5 (べき a^n の計算)>

(1) C $a \times \{a^1\}$;

(2) <u>for</u> $i:=2$ <u>to</u> n <u>do</u> $= \{a^i\}$;

<例6 (逆数キーのないときの $1/x$ の計算)>

C $x \div \{x\} = \{1\} = \{1/x\}$;

同様にして, +/- キーのないときの符号つけかえも考えられよう.

<例7 (メモリを使った積和 $s_n = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ の計算)>

(1) C CM $\{0; 0\}$;

(2) <u>for</u> $i:=1$ <u>to</u> n <u>do</u>

$a_i \times b_i =$ M+ $\{a_ib_i;\ s_i\}$;

(3) RM $\{s_n\}$;

<例8 (多項式の値)>

Horner法によって, $f(x) := a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ の値を計算する. 漸化式 $b_0 = a_0$; $b_i = b_{i-1}x + a_i$, $i=1,\cdots,n$ によって b_i を求める:

(1) C x CM M+ $\{x;\ x\}$;

(2) C a_0 $\{b_0\}$;

(3) **for** $i:=1$ **to** n **do** × RM + a_i = $\{\ell_i\}$;

最後の表示が $f(x)$ となる．

〈例9（2項分布 $B(n,p)$ の確率の値）〉

$$\Pr(x=r) = {}_nC_r\, p^r (1-p)^{n-r}, \quad r=0,1,\cdots,n$$

を求める． $\Pr(x=r) =: p_r$， $q:=1-p$ とおくと，p_r は漸化式

$$p_0 = q^n$$

$$p_{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\cdot\frac{p}{q}\cdot p_r, \quad r=0,1,\cdots,n-1$$

を満たす：

(1) C 1 − p = CM M+ $\{q\}$;

(2) p ÷ RM = CM M+ $\{p/q\}$;

(3) C q ×;

for $i:=2$ **to** n **do** = $\{q^i\}$; $\{p_0\}$

(4) **for** $r:=0$ **to** n **do**

× $(n-r)$ ÷ $(r+1)$ × RM = $\{p_r\}$;

5 問題

上に示した方法は，次のような点に役立たせることが出来よう．i) 電卓の特徴を明確にし，電卓の評価や，算法の評価に役立つ．ii) 表示Δを記録し，計算進行を確認することにより，誤りの減少．iii) データと算法を，例えば，4 計算例に示したようにして記録し，プログラム・ライブラリを作る．

付録 いくつかの市販の電卓についての機能調査結果

調査に当っては、東京書籍の野原、隆船の手をわずらわした。

操作			OMRON・8	OMRON・8M	Panasonic Auto Constant	Canon Palmtronic 8M	Sharp EL-8000S	Sharp EL-8112	Sharp EliMate ピタゴラス	CASIO pocket-8	CASIO 801-MR	SANYO CZ-3410A
〈単純操作〉	A1(消去)	C{0}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	A2(入力)	n{n}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	A3(単項演算)	{v}μ{μv}	(√x) ○	(+/-, √x) ○	(√x) ○	(√x) ○	—	(+/-, √x) ○	(+/-, √, 1/x, …) ○	—	(√x) ○	(+/-, √, …) ○
〈複合操作〉	A4(計算開始)	cxφ{x}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	A5(計算続行)	φ{v}xψ{vφx}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	A6(結果表示)	φ{v}x={vφx}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	A7(連続計算)	={v}φ{v}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
〈省略操作〉	A8(消去の省略)	=xφ ⇒ cxφ	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	A9(平方など)	φ{v}= ⇒ φ{v}v=	○	○	○	(×, ÷) ○ (+, −はだめ)	(×, ÷) ○ (+, −はだめ)	(×) ○ (他はだめ)	○	○	○	○
	A10(定数計算)	φy={v}x= ⇒ φy={v}xφy=	(+, −, ÷) ○ (xはA10′)	(+, −, ÷) ○ (xはA10′)	(+, −, ÷) ○ (xはA10′)	(÷) ○ (xはA10′)	(÷) ○ (xはA10′)	(÷) ○ (xはA10′)	(÷) ○ (xはA10′)	○	(×, ÷) ○ (+, −はだめ)	(+, −, ÷) ○ (xはA10′)
	A11(べきなど)	φy={v}= ⇒ φy={v}v=	○	○	○	○ (+, −はだめ)	○ (+, −はだめ)	○ (+, −はだめ)	○ (+, −はだめ)	○	○ (+, −はだめ)	○
〈メモリ操作〉	A12(メモリ消去)	CM{;0}	—	○	—	○	—	○	○	—	○	○
	A13(メモリ呼出し)	{;A}RM{A}	—	○	—	○	—	○	○	—	○	○
	A14(メモリ加算)	{v;A}M+{;A+v}	—	○	—	○	—	○	○	—	△ (M+で=機能を同時にもつ)	○
備考			メモリなし		メモリなし	M−あり。	メモリなし	RMとCMは同一キー。	34個機能付き。	メモリなし		他に、多くのキーあり。関数付き。