数理解析研究所講究録
第 317 巻 1978 年 42-51

非線形拡散方程式 $\dot{u} = \frac{1}{2}u'' + F(u)$ の解の travelling wave への収束

東工大 応物 内山耕平

1、単独の非線形方程式

(1) $$u_t = \frac{1}{2}u_{xx} + F(u) \qquad (u = u(t,x),\ t>0,\ x \in R^1)$$

を考える。ここで F は区間 [0, 1] 上で定義された滑かな函数で $F(0) = F(1) = 0$ を満たすとする。初期条件

(2) $$u(0+,x) = f(x) \qquad 0 \leq f \leq 1$$

(常に $f \not\equiv 0$ とする) を満たす (1) の古典的解で $0 \leq u \leq 1$ となるものが唯一存在する (cf. [4])。F として次の二通りの場合を考える。

I. $F(u) > 0 \quad 0 < u < 1, \quad \alpha \equiv F'(0) > 0$

II. $F'(0) < 0,\ F'(1) < 0$ かつ次のような定数 μ がある:

$F(u) < 0 \quad 0<u<\mu;\ F(u)>0 \quad \mu<u<1,\quad 0<\mu<1$。

これらの条件の意味については [1] または [3] を参照されたい。なおこれらの文献では，u は拡散しながら増殖する生物群の個体群密度を表わすとされている。

2．本稿の目的は (1)−(2) の解の $t\to\infty$ とした時の行動を調べることにあるが，それは次の方程式

(3) $$0=\frac{1}{2}w''+cw'+F(w) \qquad \begin{pmatrix} w=w(x),\ x\in R^1 \\ c\text{ は実定数} \end{pmatrix}$$

の解と関連づけられる，但し w は常に F に適合するとする (i.e. $0\leq w\leq 1$)。(3) は $w(x-ct)$ が (1) を満たすことと同じである。この形の (1) の解を travelling wave (solution)，w を travelling wave front と呼ぶ（但し自明解 $w\equiv 0$ 及び $w\equiv 1$ を除く）。$x\mapsto -x$ なる変換を考えることにより，$c\geqq 0$ の場合だけ調べれば十分である。以下で問題になるのは (3) の

(4) $$\lim_{x\to-\infty} w(x)=1,\quad \lim_{x\to+\infty} w(x)=0$$

を満たす解である。$w(0)=\frac{1}{2}$ と規格化すればそのような解は高々一つである。

3．次の結果は Aronson-Weinberger [1] による。

(i) $F\in \mathrm{I}$ とする。ある正の定数 c_0 があって，(3) の自明

11

でない解が存在するための必要十分条件が $|c| \geq c_0$ と書かれる。$c_0 \leq \sup_u F(u)/u$ である。対応する解 w を $w(0) = \frac{1}{2}$ と規格化して，以後これを w_c と書く。$c \geqq c_0$ の時 w_c は (4) をみたし，$w_c' < 0$ かつ

$$(5) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{w_c'(x)}{w_c(x)} = -b, \quad b = \begin{cases} c + \sqrt{c^2 - 2\alpha} & c = c_0 \\ c - \sqrt{c^2 - 2\alpha} & c > c_0 \end{cases}$$

が成り立つ。

(ii) $F \in \mathrm{II}$ とする。ある定数 c_* があって (4) を満たす (3) の解は $c = c_*$ の時存在しかつその時に限る。また

$$(6) \qquad c_* > 0 \quad と \quad \int_0^1 F(u)\,du \quad は同値である。$$

対応する解を w_* と書く。$w_*' < 0$ である。

上の結果の証明は，(6) を除けば，(3) を

$$\begin{cases} w' = p \\ p' = -2c - 2F(w) \end{cases}$$

と書いて，これに二次元自励系の理論を適用すれば比較的容易になされる。(6) の証明も容易である。実際 (3) の右辺に w' をかけて x に関して積分すれば，$\int^x w''w'\,dx = \frac{1}{2}(w')^2$ より

$$c_0 \int_{-\infty}^{\infty} (w')^2\,dx = \int_0^1 F(w)\,dw$$

を得る。したがって (6) が成り立つ。

4、 $F \in I$ とする。$f \equiv 0$ でなければ (1)−(2) の解 u は

$$u(t,x) \longrightarrow 1 \qquad (t \to \infty,\ 広義一様)$$

を満たす (cf. [1])。また $f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ であれば各 $t \geqq 0$ に対して $u(t,x) \to 0$ $(x \to \infty)$ である。これらが満たされる時，十分大きなすべての t に対して

$$(7) \qquad m(t) \equiv \sup\{x\,;\, u(t,x) = \tfrac{1}{2}\}$$

は有限値をとる。定理を述べる前に次の条件を用意する：

$$(8) \qquad f(x) = 0 \qquad x > N \qquad (N\text{ はある実数}),$$

(9) $A > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{A(x+x_0)}{A(x)} = 1$ がすべての $x_0 \in R^1$ に対して成立する函数 A 及び実定数 $\lambda > 0$ をもって

$$f(x) = e^{-\lambda x} A(x)$$

と書ける。

定理 1、 f は上の (7) または (8) の他に次を満たすとする

$$(10) \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \quad \text{または}\quad f(x)\text{ はある左半直線上で非増加。}$$

この時 (1)−(2) の解 u に対し，$x > 0$ に関して一様に

$$(11) \qquad |u(t,x) - w_c(x - m(t))| \to 0 \qquad (t \to \infty)$$

が成り立つ，但し $m(t)$ は (7) で定義され c は

$$c = \begin{cases} c_0 & (8)\text{ または }(9)\text{ で }\lambda \geqq c_0 - \sqrt{c_0^2 - 2\alpha}, \\ \dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\alpha}{\lambda} & (9)\text{ で }\lambda < c_0 - \sqrt{c_0^2 - 2\alpha}\text{ の時.} \end{cases}$$

で与えられる。$m(t)$ は十分大きな t に対して微分可能で $dm(t)/dt \longrightarrow c \quad (t \to \infty)$ が成立する。もし $F(u)/u$ が非増加函数であれば上で条件(10)は除かれる。

証明は [5] を参照。

5、$F \in \mathrm{II}$ とする。次は Fife - McLeod [2] による。

__定理 2__、(i) $\underline{\lim}_{x \to -\infty} f(x) > \mu$ かつ $\overline{\lim}_{x \to +\infty} f(x) < \mu$ であれば，ある $x_0 \in R^1$ があって $x \in R$ に関し一様に

$$|u(t,x) - w_*(x - c_* t + x_0)| \to 0 \qquad t \to \infty.$$

(ii) $\underbrace{\text{任意の}}_{c_* > 0\text{ とする。}}$ $\bar{\mu} > \mu$ に対しある $L > 0$ があって，

$$f(x) > \bar{\mu} \qquad |x| < L$$

かつ f の台が有界であれば，ある $x_1, x_2 \in R^1$ があって一様に

$$|u(t,x) - w_*(x - c_* t + x_1) - w_*(-x + c_* t + x_2)| \to 0 \quad (t \to \infty).$$

6、$F \in \mathrm{I}$ で特に $c_0 > \sqrt{2\alpha}$ の場合には定理 1 の比較的簡単な証明があり，結果も精密化される。

__定理 3__、$F \in \mathrm{I}$ で $c_0 > \sqrt{2\alpha}$ とする。$\overset{\text{ある}}{\frown}$ $b > c_0 - \sqrt{c_0^2 - 2\alpha}$ に

対し $f(x) = O(e^{-bx})$ であれば，ある $x_0 \in R^1$ があって $x > 0$ に関し一様に

$$|u(t,x) - w_{c_0}(x - c_0 t + x_0)| \longrightarrow 0 \qquad t \to \infty 。$$

証明の概略。2つの正定数 $\bar{b}$, η を

$$c_0 - \sqrt{c_0^2 - 2\alpha} < \bar{b} < c_0 + \sqrt{c_0^2 - 2\alpha}, \qquad \bar{b} \leqq b,$$
$$\frac{\bar{b}^2}{2} - c_0 \bar{b} + \alpha < -\eta$$

となるようにとっておく。十分大きな正定数 A に対し

$$U^*(t,x) = w_{c_0}(x - A(1 - e^{-\eta t})) + e^{-\eta t - \bar{b}x}$$
$$U_*(t,x) = w_{c_0}(x - Ae^{-\eta t}) - e^{-\eta t - \bar{b}x}$$

とおけば，次が成立：f がある定数 t_1, t_2, x_1, x_2 をもって

$$U_*(t_1, x + x_1) \leqslant f(x) \leqslant U^*(t_2, x + x_2) \qquad x \in R$$

を満たせば，(1)—(2) の解 u はすべての $x \in R$, $t > 0$ に対し

$$U_*(t + t_1, x + x_1) \leqslant u(t, x + c_0 t) \leqslant U^*(t + t_2, x + x_2) \tag{12}$$

を満たす。これは次のような方針で証明される。F を R^1 上の滑らかな函数 $\bar{F}$ に拡張しておく，但し $\bar{F}' \leqslant \alpha$ とする。

$V(t,x) = u(t, x + c_0 t) - U_*(t + t_1, x + x_1)$ とおくと

$$V_t = \frac{1}{2}V_{xx} + c_0 V_x + \bar{F}'(0)V + Q(t+t_1, x+x_1)$$

$$Q(t,x) \equiv \frac{1}{2}\bar{U}_{*xx} + c_0\bar{U}_{*x} + \bar{F}(\bar{U}_*) - \bar{U}_{*t}$$

を得る。$V(0,x) \geq 0$ であるから $V \geq 0$ を得るには $Q \geq 0$ を云えばよい。そこでAをこれが成り立つように選んでおく（詳細は省略 c.f. [5]）。こうして(12)の最初の不等式が得られる。残りの不等式も同様に証明される。

$w_{c_0}(x)$ はほぼ $e^{-b_0 x}$ ($b_0 = c_0 - \sqrt{c_0^2 - 2\alpha}$) の速さで，$x \to \infty$ の時 0 に近づく。したがって各 $t > 0$ に対し $\bar{U}_*(t,\cdot)^+$ の台は有界である。上に述べたことから次はほとんど明らかである。

<u>補題1</u>. (i) 定理の仮定の下に，ある定数 x_1, x_2 及び K があって，次が成立

(13)
$$w_{c_0}(x+x_1) - Ke^{-\gamma t - \bar{b}x} \leq u(t, x+c_0 t) \leq w_{c_0}(x+x_2) + Ke^{-\gamma t - \bar{b}x}。$$

(ii) 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し次のような $\delta > 0$ が存在する：

$$|f(x) - w_{c_0}(x)| < \delta e^{-\bar{b}x} \qquad x \in R$$

であれば

$$|u(t, x+c_0 t) - w_{c_0}(x)| < \varepsilon e^{-\bar{b}x} \qquad t > 0,\ x \in R。$$

次の補題は放物型方程式に関するShauderの評価として知

られているものの特別な場合である。

<u>補題２</u>．　(1)－(2) の解を u とする。 u_x, u_{xx}及び u_{xxx} は $[1,\infty)\times R^1$ 上で有界である。また (t,x) の函数 V に対し

$$|V|_{t,x}^{t+1} = \sup_{t<s<t+1,\, y>x} |V(s,y)|$$

と書くことにすれば、

$$|u_x(t+1,x+1)| \leqq K|u|_{t,x}^{t+1}, \quad |u_{xx}(t+1,x+1)| \leqq K|u_x|_{t,x}^{t+1}$$

が成り立つ，但し K は F にのみ依存する定数である。

これらの準備があれば定理３の証明は容易である。補題２と (13) より，$z(t,x) \equiv u(t,x+c_0t)$ は次を満たす。

(14)
$$z,\ |z_x|,\ |z_t| \leqq K_1 \min\{e^{-b_1x} + e^{-\gamma t - \bar{b}x},\ 1\}, \quad (t>1)$$

ここに $b_1 = c_0 + \sqrt{c_0^2 - 2\alpha}/2$，また K_1 は t, x によらない定数。今正の数 ε を $(c_0 - \bar{b})\varepsilon < \gamma$ ととり

$$E(t) = \int_{-\varepsilon t}^{\varepsilon t} e^{2c_0x}\left[\frac{1}{4} z_x(t,x)^2 - \int_0^{z(t,x)} F(r)\,dr\right] dx$$

とおく。(11) より，E(t) は有界 ($t\to\infty$ の時)，また

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon e^{2c_0\varepsilon t}\left(\frac{1}{4}(z_x)^2 - \int_0^z F(r)dr\right)(t,\varepsilon t) + O(e^{-2c_0\varepsilon t})$$
$$+ \int_{-\varepsilon t}^{\varepsilon t} e^{2c_0x}\left[\frac{1}{2} z_x z_{tx} - F(z) z_t\right] dx$$

$$= o(1) + \left[\frac{1}{2} e^{2c_0 x} z_x z_t\right]_{-\varepsilon t}^{\varepsilon t}$$

$$- \int_{-\varepsilon t}^{\varepsilon t} \left[\frac{1}{2}(e^{2c_0 x} z_x)_x - F(z)\right] z_t \, dx$$

$$= o(1) - \int_{-\varepsilon t}^{\varepsilon t} e^{2c_0 x}\left[\frac{1}{2} z_{xx} + c_0 z_x + F(z)\right] dx$$

である。したがって次のような列 $\{t_n\}$ $(t_n \to \infty)$ がとれる；

$$E(t_n) \longrightarrow 0 \qquad n \to \infty。$$

補題2の前半により，$\{t_n\}$ の部分列 $\{t_{n'}\}$ を $\{z(t_{n'}, x)\}$ が，各 $N \in R_+^1$ について，$C^2[-N, N]$ の強位相で収束するようにとれる。$w(x) = \lim z(t_{n'}, x)$ とおけば $\lim E(t_{n'}) = 0$ より $\frac{1}{2}w'' + c_0 w' + F(w) = 0$ を得る。一方補題1より w は自明でない。したがってある x_0 があって $w(x) = w(x + x_0)$ と書ける。w_{c_0} は補題1 (ii) の意味で安定であるから $\lim_{t\to\infty} z(t, x) = w_{c_0}(x + x_0)$ である。定理3の証明終。

注意1，上の証明と同様な筋道で定理2が証明できる。

注意2，上の方法は多次元の場合にはうまくいかないようである。実際，$f(x)$ $(x \in R^n)$ の台が有界の時，$u_t = \frac{1}{2}\Delta u + F(u)$，$u(0, x) = f(x)$ の解 u に対して

$$u(t, x + c_0 t \xi) \longrightarrow 0 \qquad (t \to \infty，広義一様)$$

である，ここに $\xi \in R^n$ $|\xi| = 1$。

[1] Aronson, D.G., Weinberger, H. F., "Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve propagation", Partial Differential Equations and Related Topics, Lecture Notes in Math. (Springer) No. 446, 1975.

[2] Fife, P. C., McLeod, J. B., "The approach of solution of nonlinear diffusion equations", to appear in Arch. Rat. Mech. Anal.

[3-a] R. A. Fisher, The genetical theory of natural selection, Oxford, Clarendon Press.

[3-b] R. A. Fisher, "The advance of advantageous genes", Ann. of Eugenics 7 (1937), 355-369.

[4] A. Kolmogorov, I. Petrovsky, N. Piskunov, "Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de la martiére et son application a un problème biologique", Moscow Univ. Bull. Math. 1 1937, 1-25.

[5] K. Uchiyama, "The behavior of solutions of some non-linear diffusion equations", to appear in Jour. Math. Kyoto Univ.