数理解析研究所講究録
第 317 巻 1978 年 81-92

三要素系における周期解の存在

立命大　理工　中島久男

振動現象については，工学的系・物理系・化学反応系・生物系などにおいて，多くの研究者によって解析されてきた。特に二変数の微分方程式系における周期解の存在に関しては，系統的な数学的取り扱いの手法が確立されていて，Van der Pol 系以来近年の生態系に至るまで，安定な周期解を持つモデルが数多く提出されている。一方，三変数あるいはそれ以上の変数の微分方程式系における周期解の存在に関しては，その解析の手法が確立されておらず，最近，化学反応系における解析が二三，提出されだしたのが現状である。ここでは化学反応系において周期解の存在を示す J. J. Tyson の手法を用い，特に生態系にあらわれる型まで一般化された三変数で負帰還のある方程式系において周期解が存在することを示し，時間遅れがある方程式で三変数の微分方程式と等価な系において周期解が存在する例について議論を行った。またこ

の手法においては，bifurcation の手法においては bifurcate する近傍における小さな振幅の周期解の存在と安定性が示されるのに対し，振幅の大きな周期解の存在も示すことができる。

ここで考察する方程式は

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,z)F(x) \\ \dot{y} &= g(y,x) \\ \dot{z} &= h(z,y) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

とする。ここで，化学反応系・生態系を念頭におき，x, y, z は化学反応物質の濃度あるいは生物の個体数を表わすものとし，考察する状態空間は x, y, z が共に非負なる領域とする。函数，f, g, h, F に次の条件を課する。

(i) f, g, h, F は考察する状態空間で微分可能.

(ii) $F(0) = 0$，$x > 0$ に対し $F(x) > 0$；$g(0,x) \geq 0$；$h(0,y) \geq 0$

(iii) $f_x < 0$，$f_z < 0$；$g_y < 0$，$g_x > 0$；$h_z < 0$，$h_y > 0$

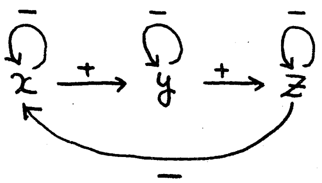
(iv) $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} > 0$ が存在し

$$f(\hat{x},0) = 0, \quad g(\hat{y},\hat{x}) = 0, \quad h(\hat{z},\hat{y}) = 0$$

(v) $g(y^{**},0) = h(z^{**},y^{**}) = 0$ なる z^{**} に対し

$$f(0,z^{**}) > 0$$

条件(ii)は解の非負性（$x, y, z \geq 0$なる状態から出発した解は任意の正の時間の後に$x, y, z \geq 0$なる領域内に留まる）を保証している。条件(iii)は系が負帰還系であることを示していて，x, y, zの活性化，阻外化の関係は下図のとおりとなる。



ただし+，−の符号はそれぞれ活性化、阻外化を示す。条件(iv)は後で議論するが解の有界性を与える。系(I)は正の領域に一つと$(0, y^{**}, z^{**})$の二つのcritical pointを持つが，条件(v)は$(0, y^{**}, z^{**})$のcritical pointが不安定なことを示している。

系(I)において周期解が存在する証明の概略は，その内部にcritical pointを一つも持たないドーナツ状のconfined setを構成する。次にその一つの断面から出発した解が有限時間の後に再びその断面に到達することを示し，最後に不動点定理から周期解の存在を示す。

次のような領域をΩ_0とする。

$$0 \leq x \leq \hat{x} \quad , \quad 0 \leq y \leq \hat{y} \quad , \quad 0 \leq z \leq \hat{z} .$$

この領域Ω_0の表面において，(I)によって作られるベクトル

場は、面と平行かあるいは領域の内部を向いていることは容易にわかる。すなわちΩ_0はconfined setとなっている。この領域Ω_0はその表面に一つのcritical point $(0, y^{**}, z^{**})$を持っているが、それを含まない次のような領域Ωを考える。

$$x \le \tilde{x}, \quad 0 \le y \le \tilde{y}, \quad 0 \le z \le \tilde{z}$$

$$K(x,y,z) \equiv -\int_{\tilde{x}}^{x} \frac{ds}{F(s)} + \int_{\tilde{y}}^{y} A(s)\,ds + \int_{\tilde{z}}^{z} B(s)\,ds \ge K_0$$

ただし

$$B(z) = 0 \qquad ; \quad 0 \le z < z^{**}+\delta$$

$$= \frac{M(z)}{h(z,y^{**}) - h(z^{**},y^{**})} \qquad ; \quad z^{**}+\delta \le z \le \tilde{z}$$

$$A(y) = 0 \qquad ; \quad 0 \le y < y^{**}+\varepsilon$$

$$= -\frac{n(y)}{m(y)} \qquad ; \quad y^{**} \le y \le \tilde{y}$$

また

$$M(z) = \min_{0 \le x \le \tilde{x}} \{ f(x,z) - f(x,z^{**}) \}$$

$$n(y) = \max_{0 \le z \le \tilde{z}} B(z) \{ h(z,y) - h(z,y^{**}) \}$$

$$m(y) = \max_{0 \le x \le \tilde{x}} \{ g(y,x) - g(y^{**},x) \}$$

δ, ε, K_0 は正の定数とする。

<u>*lemma 1.*</u> δ, ε, K_0 を適当に選ぶと領域 R は系 (I) の *confined set* となる。

（証明） 領域 R の境界の五つの平面において，(I) によって構成されるベクトル場は面と平行かあるいは領域内部の方向を向いていることは容易に確められる。最後の $K(x,y,z)=K_0$ なる面上におけるベクトルの向きを調べるために $K(x,y,z)$ を解に沿って微分すると

$$\dot{K} = K_x\dot{x} + K_y\dot{y} + K_z\dot{z}$$

$$= -f(x,z) + g(y,x)A(y) + h(z,y)B(z)$$

$$= -f(0,z^{**}) + \{f(0,z^{**}) - f(x,z^{**})\} + g(y^{**},x)A(y)$$

$$- \{f(x,z) - f(x,z^{**}) + \{h(z,y^{**}) - h(z^{**},y^{**})\}B(z)$$

$$+ \{g(y,x) - g(y^{**},x)\}A(y) + \{h(z,y) - h(z,y^{**})\}B(z)$$

となる。上の定義より

$$- \{f(x,z) - f(x,z^{**}) + \{h(z,y^{**}) - h(z^{**},y^{**})\}B(z) \leq -M(z^{**}-\delta)$$

$$\{g(y,x) - g(y^{**},x)\}A(y) + \{h(z,y) - h(z,y^{**})\}B(z) \leq N(y^{**}-\varepsilon)$$

となり $N = \max\limits_{0\leq y\leq \tilde{y}} A(y)$ とすると，

$$\dot{K} \leqq -f(0, z^{**}) + \{f(0, z^{**}) - f(x, z^{**})\} + g(y^{**}, x)N - M(z^{**}+\delta) + n(y^{**}+\varepsilon)$$

となる。ここで $K=K_0$ 上における x の最大値 x_{max} は

$$\int_{\tilde{x}}^{x_{max}} \frac{ds}{F(s)} = \int_{\tilde{y}}^{\hat{y}} A(s)\,ds + \int_{\hat{z}}^{\tilde{z}} B(s)\,ds - K_0 = -K_0$$

となる。ここで K_0 を十分大きくとると x_{max} は十分小さくなりまた δ, ε を十分小さくとれば上の不等式の第二項以降は十分小さくなり，第一項は負であるから $\dot{K}<0$ となる。従って $K=K_0$ なる曲上においてベクトルは領域の内部を向く。Q.E.D

条件 (iii) よりこの領域内の critical point は唯一である。これを (x^*, y^*, z^*) とする。次に領域 Ω を次のように8つの部分に分割する。

(1) $x \leq x^*$, $y \leq y^*$, $z \leq z^*$

(2) $x^* \leq x$, $y \leq y^*$, $z \leq z^*$

(3) $x^* \leq x$, $y^* \leq y$, $z \leq z^*$

(4) $x^* \leq x$, $y^* \leq y$, $z^* \leq z$

(5) $x \leq x^*$, $y^* \leq y$, $z^* \leq z$

(6) $x \leq x^*$, $y \leq y^*$, $z^* \leq z$

(7) $x^* \leq x$, $y \leq y^*$, $z^* \leq z$

(8) $x \leq x^*$, $y^* \leq y$, $z \leq z^*$

<u>lemma 2.</u> critical point (x^*, y^*, z^*) が不安定な場合，その近においてこの点へ向かう特異軌道は，上で定義された box の(7)と(8)を結ぶ方向をとる。

（証明） 系(I)を critical point (x^*, y^*, z^*) のまわりで線型化すると

$$\dot{\xi} = f_{x^*}(x^*, z^*)F(x^*)\xi + f_{z^*}(x^*, z^*)F(z^*)\zeta$$
$$\dot{\eta} = g_{x^*}(y^*, x^*)\xi + g_{y^*}(y^*, x^*)\eta$$
$$\dot{\zeta} = h_{y^*}(z^*, y^*)\eta + h_{z^*}(z^*, y^*)\zeta$$

となり，係数が作る行列の固有方程式は

$$J(\lambda) = (\lambda - f_{x^*}F)(\lambda - g_{y^*})(\lambda - h_{z^*}) - f_{z^*}F\cdot g_{x^*}h_{y^*} = 0$$

となる。$f_{x^*}F$，g_{y^*}，$h_{z^*} < 0$，$f_{z^*}F\,g_{x^*}h_{y^*} < 0$ であるから，この方程式は常に負の実根を持つ。また (x^*, y^*, z^*) が不安定な場合には，負の実根と互いに共役な実数部が正の複素根を持つ。そのとき負の実根を ν_0 とすると

$$J(f_{x^*}F) = J(g_{y^*}) = J(h_{z^*}) = -f_{z^*}F\cdot g_{x^*}\cdot h_{y^*} > 0$$

であるから $\nu_0 < f_{x^*}F$，g_{y^*}，h_{z^*} となる。ν_0 に対する固有ベクトルを $\{X, Y, Z\}$ とすると，

$$Z = \frac{\nu_0 - f_{x^*}F}{f_{z^*}}X \ , \quad Y = \frac{g_{x^*}}{\nu_0 - g_{y^*}}X$$

となり $X>0$ とすると $Y<0$, $Z>0$ となり box (7)(8) を結ぶ方向を向いている。　　Q.E.D.

<u>定理</u>　系(I)の正の領域にある critical point が不安定であれば，領域Ω内に周期解が存在する。

(証明)　まず box (7) に着目すると，その一つの表面 $x=x^*$ において $\dot{x}<0$ となり，その面上の点は時間がたつと box (6) に入る。同様にして $y=y^*$, $z=z^*$ の面上の点は時間がたつと，それぞれ box (4), box (2) へ入る。したがって box (7) の中の点は時間がたつと他の box, (2), (4), (6) のいずれに入るか，または critical point (x^*, y^*, z^*) に漸近するかの　ずれかである。box (8) について同様の考察を行えば，その中の点は時間がたつと他の box，(1)，(3)，(5) のいずれに入るかまたは (x^*, y^*, z^*) に漸近するかのいずれかであるかがわかる。ここで領域Ωより box (7),(8) を除外する。box (1)〜(6) の領域はまだ critical point (x^*, y^*, z^*) を含んでいる。lemma 2 によって critical point に向かう特異軌道は box (7),(8) を結ぶ方向であったが，その特異軌道とその軸が critical point で接する cylinder でもって critical point を切り取る。critical point

の不安定性からこの cylinder の側面では系(I)のベクトルが全て cylinder の外部を向くように取ることができる。これで、その側面で系(I)によって構成されるベクトル場のベクトルが領域の内部を向き、かつ critical point を含まないドーナツ状の領域を構成することができた。

box (1) の一つの面 $x=x^*$ を F とする。F 上の点はそこにおいて $\dot{x}>0$ であることから box (2) に時間がたつと入る。box (2) の境界面上では $y=y^*$ の面以外では、ベクトルは全て box (2) の内部を向き、$y=y^*$ 上では外部を向いているので、box (2) に入った点は有限の時間の後に面 $y=y^*$ を通って box (3) に入ってゆく。このような議論を操り返してゆくと、F から出発した点は各々の box を (1) → (2) → (3) → (4) → (5) → (6) → (1) の順にへめぐって再び面 F に有限の時間の後に戻ってくる。この初期点から、二度目に到達する点への写像を T とすると、明らかにこれは F から F の内部への写像であり、軌道の連続性から T は連続写像である。従って不動点定理によって写像 T に関する不動点が少くとも一個存在し、この点から出発する解が周期解となっている。 Q.E.D.

lemma 2 の線型化の議議から容易に確めることができるが系(I)はその函数のパラメーターの変化によって Hopf 型の

bifurcation を起こす。しかし上の定理は bifurcation の近傍に制限されておらず，系(I)の正の領域の critical point が不安定であるという条件のみで周期解の存在を示すことができた。

例．　時間遅れをともなう自己疎外系

$$\dot{N}(t) = \left\{ \varepsilon - \beta N(t) - \int_{-\infty}^{t} N(\tau) Q(t-\tau) d\tau \right\} N(t)$$

を考える。これは $Q(t)=0$ の場合は logistic 成長で有名な方程式で，生態モデルにおいてよく現われる系である。それにさらに自己疎外が時間遅れをともなう場合を考察する。

$$Q(t) = ke^{-\gamma t}$$

なる場合は，系の正の領域に存在する critical point は安定であることは容易に確められる。つぎに

$$Q(t) = k\left\{ e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t} \right\}, \quad (\gamma_2 > \gamma_1)$$

なる場合を解析する。これは時間遅れの効果がある特定の時間に最も強くあらわれるという場合の一つの例である。

ここで次のような変数の変換を行う。

$$x(t) = N(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} N(\tau)\, e^{-\gamma_2 (t-\tau)}\, d\tau$$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} N(\tau) \left\{ e^{-\gamma_1 (t-\tau)} - e^{-\gamma_2 (t-\tau)} \right\} d\tau .$$

上の積分微分方程式は次のような連立常微分方程式となる。

$$\dot{x} = (\varepsilon - \beta x - \kappa z)\, x$$

$$\dot{y} = -\gamma_2 y + x$$

$$\dot{z} = -\gamma_1 z + (\gamma_2 - \gamma_1) y .$$

この系は条件(i)〜(v)を全て満足しているので，もし正の領域にある critical point が不安定であれば周期解が存在することが定理から導かれる。この系の critical point は $(0, 0, 0)$ と

$$(x^*, y^*, z^*) = \left\{ \frac{\varepsilon \gamma_1 \gamma_2}{\beta \gamma_1 \gamma_2 + \kappa(\gamma_2 - \gamma_1)},\ \frac{\varepsilon \gamma_2}{\beta \gamma_1 \gamma_2 + \kappa(\gamma_2 - \gamma_1)},\ \frac{\varepsilon(\gamma_2 - \gamma_1)}{\beta \gamma_1 \gamma_2 + \kappa(\gamma_2 - \gamma_1)} \right\}$$

の二つである。ここで次のようなパラメーターと変数の変換を行う。

$$X = x / x^*$$

$$Y = y / y^*$$

$$Z = z / z^*$$

$$\beta' = \beta \gamma_1 \gamma_2 / \{ \beta \gamma_1 \gamma_2 + \kappa(\gamma_2 - \gamma_1) \}$$

微分方程式は

$$\dot{X} = \varepsilon\{1-\beta' X-(1-\beta')Z\}X$$

$$\dot{Y} = \gamma_2(-Y+X)$$

$$\dot{Z} = \gamma_1(-Z+Y)$$

となり critical point (1, 1, 1) のまわりで線型化し，その係数が作る行列の固有方程式は，

$$\lambda^3+(\beta'\varepsilon+\gamma_1+\gamma_2)\lambda^2+\{\beta'\varepsilon(\gamma_1+\gamma_2)+\gamma_1\gamma_2\}\lambda+\gamma_1\gamma_2\varepsilon=0$$

となる。Routh-Hurwitz の定理により根の実数部が全て負となる必要十分条件は，以下の三つの不等式が全て成り立つことである。

$$\beta'\varepsilon+\gamma_1+\gamma_2>0$$

$$(\beta'\varepsilon+\gamma_1+\gamma_2)\{\beta'\varepsilon(\gamma_1+\gamma_2)+\gamma_1\gamma_2\}-\gamma_1\gamma_2\varepsilon>0$$

$$\gamma_1\gamma_2\varepsilon>0$$

一番目と二番目の不等式は常に成立するが，二番目の不等式は，εに比べγ_1，γ_2が小さく，β'が小さい場合には不等式は成立しない。すなわち，N(t)の増加率よりも時間遅れをともなう履歴効果の減衰率が小さく，また同時的な効果よりも，時間遅れの効果が大きい場合に，critical point が不安定となり，周期解があらわれる。