数理解析研究所講究録
第 319 巻 1978 年 20-25

コホモロジー複素射影空間上の S^1 作用

東大・理　服部晶夫

Petrie は[P]においてつぎの予想を提出している．

予想　X を 2n 次元可微分閉多様体で複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ と同じコホモロジー環をもつものとする．すなわち，X の整係数のコホモロジー環が

(1) $$H^*(X) = \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1}), \qquad x \in H^2(X)$$

の形であるとする．もし，X 上の可微分 S^1 作用で自明でないものが存在するならば，X の Pontryagin 類 $p(X)$ は

(2) $$p(X) = (1+x^2)^{n+1}$$

の形である．

この予想は現在のところ部分的にしか解決されていない．これに関し，川久保勝夫氏により次の事実が指摘されている．

命題　(1)の形のコホモロジー環をもつ可微分閉多様体Xに対し(2)が成り立つことと

(3) $$\{e^{\frac{kx}{2}}\hat{\mathcal{A}}(X)\}[X] = 0$$

が $k \equiv n+1 \mod 2$, $|k| < n+1$ となるすべての整数 k に対して成り立つこととは同値である。ここで，特性類 $\hat{\mathfrak{a}}(X)$ は，$p(X)$ を形式的に $p(X) = \prod_i (1+x_i^2)$ と書いたとき，

$$\hat{\mathfrak{a}}(X) = \prod_i \frac{x_i}{e^{\frac{x_i}{2}} - e^{-\frac{x_i}{2}}}$$

で与えられるものである。

この命題に関連して，$Spin^c$ 構造をもつ多様体上の S^1 作用に関し最近筆者が得た結果を報告するのが本稿の目的である。

以下，X は　　　向きづけられた $2n$ 次元可微分閉多様体で，$H^1(X;\mathbb{Z}) = 0$ であり，$c_1 \equiv w_2(X) \mod 2$ となるコホモロジー類 $c_1 \in H^2(X;\mathbb{Z})$ が存在し，自明でない可微分作用 ϕ: $S^1 \times X \longrightarrow X$ が与えられているとする。

上のような c_1 を固定し，それが $c_1 = k_0 x$, $x \in H^2(X;\mathbb{Z})$, の形であるとする。$E \longrightarrow X$ を複素線バンドルで $c_1(E) = x$ となるものとする。$H^1(X;\mathbb{Z}) = 0$ だから S^1 作用 ϕ はバンドル E への作用 $\tilde{\phi}$ に持ち上る cf. [S]。ϕ の固定点集合 F の各連結成分 F_i は部分多様体であるが，一点 $p_i \in F_i$ に対し

$$\tilde{\phi}(g, v) = g^{a_i} v \quad , \quad v \in E_{p_i} , \ g \in S^1 \subset \mathbb{C}$$

となる整数 a_i が定まり，これは F_i だけに依存する。持ち上げ $\tilde{\phi}$ を変えると a_i は一斉に $a_i + a$ の形に変わる [H-Y]。

一方，F_i の法バンドルを N_i とすると，N_i は複素ベクト

ルバンドルの構造をもち，次のように直和分解する：

(4) $$N_i = \sum_{m \in \mathbb{Z}, m \neq 0} N_i(m).$$

ここで，$g \in S^1 \subset \mathbb{C}$，$v \in N_i(m)$ に対し

$$\phi(g, v) = g^m v$$

である．もちろん，殆どすべての m に対し $N_i(m) = 0$ である．このような分解は一意ではないが，$m < 0$ に対しては $N_i(m) = 0$ となる分解は一意的に定まる．一般の分解は，そのような一意的な分解を基に，各 $m > 0$ に対しバンドルの直和分解

$$N_i(m) = V \oplus W$$

をとり，V を新たに $N_i(m)$，$\overline{W}$（W の共役バンドル）を $N_i(-m)$ ととることにより得られる．分解(4) に対して，$\dim_{\mathbb{C}} N_i(m)$ を $d_i(m)$ と記す．

定理 1　X は向きづけられた $2n$ 次元可微分閉多様体で，$H^1(X; \mathbb{Z}) = 0$ であり，　$c_1 \equiv w_2(X) \bmod 2$　とする $c_1 \in H^2(X; \mathbb{Z})$ が存在し，自明でない可微分 S^1 作用 ϕ をもつものとする。いま，整数 k_1，k_1' が存在し，各 i に対し N_i の分解(4) を適当にとると

(5) $$\sum_m m\, d_i(m) = k_1 a_i + k_1'$$

がすべての i に対し成り立っているとしよう．ここで a_i は $c_1 = k_0 x$ となる x を用いて先のように定められる整数である．そのとき，関係式(3) が

$$k \equiv k_0 \bmod 2, \quad |k| < |k_1|$$

となるすべての整数kに対して成り立つ。

Xが概複素多様体で、S^1作用ϕが概複素構造を保つときは、c_1として$c_1(X)$をとることができる。そのときは、$c_1(X)=k_0x$として、$N_i(m)$には概複素構造から定まる自然な複素ベクトルバンドルの構造を与えると、(5)が$k_1=k_0$に対して成り立つ。ゆえに、定理1からつぎの定理を得る。

定理2　Xは概複素閉多様体で、$H^1(X;Z)=0$であり、概複素構造を保つ自明でないS^1作用$\phi: S^1\times X \to X$が存在するとする。そのとき、$c_1(X)=k_0x$, $x\in H^2(X;Z)$とすると、関係式(3)が$k\equiv k_0 \bmod 2$, $|k|<|k_0|$となるすべてのkに対して成り立つ。

定理1, 2の応用として、Petrieの予想に関するつぎの結果を得る。

系1　Xは2n次元概複素閉多様体で、その整係数コホモロジー環は(1)の形をもち、$c_1(X)=\pm(n+1)x$であるとする。Xの概複素構造を保つS^1作用で自明でないものが存在するならば(2)が成り立つ。

注意　Xは$2n$次元概複素閉多様体で、そのコホモロジー環は(1)の形をもち、$c_1(X)=k_0x$, $|k_0|>n+1$であるとする。そのとき、Xの概複素構造を保つ自明でないS^1作用は存在し

ないことが同様の論法により証明される。

$\mathbb{C}P^n$ 上の線形な S^1 作用に対しては，各 N_i における S^1 の表現が簡単な形になる．すなわち，$\dim F_i = 2n_i$ とおくと，

$$\sum_i (n_i+1) = n+1$$

であり，N_i の分解 (4) を適当にとると，

$$(6) \qquad d_i(m) = \begin{cases} 0 , & m \neq a_i - a_k \\ n_k+1 , & m = a_i - a_k \end{cases}$$

となる．したがって

$$\sum m d_i(m) = \sum_k (a_i - a_k)(n_k+1)$$
$$= (n+1)a_i + k_1' , \quad k_1' = \sum_k (-a_k)(n_k+1)$$

となり (5) が成り立つ。このことを念頭におくと，つぎの系を得る．

系2　X は (1) の形のコホモロジー環をもつ $2n$ 次元可微分閉多様体で，自明でない S^1 作用をもつものとする．各 N_i における S^1 の表現が $\mathbb{C}P^n$ 上の線形作用と同じ形のもの，すなわち (6) が成り立つものとすると (2) が成り立つ。

以上の証明の詳細については [H] にゆずる．ただ，定理1の証明には，Atiyah-Hirzebruch が [A-H] において用いた手法を $Spin^c$ 構造の場合にまで拡張したものが基本的に用い

られることに注意しておく。

文献

[A-H] M.F. Atiyah and F. Hirzebruch, *Spin-manifolds and group actions*, Essays on Topology and Related Topics; Memoires dédiés à Georges de Rham, pp. 18 ~ 28, Springer 1970.

[H] A. Hattori, *Spin^c-structures and S^1-actions*, to appear

[H-Y] A. Hattori and T. Yoshida, *Lifting compact group actions in fiber bundles*, Jap. J. Math. 2 (1976), 13 ~ 25.

[P] T. Petrie, *Smooth S^1 actions on homotopy complex projective spaces and related topics*, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 105 ~ 153.

[S] J.C. Su, *Transformation groups on cohomology projective spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), 305 ~ 318.