数理解析研究所講究録
第319巻 1978年 100-106



# Transferと同変写像のLefschetz数

阪大理　　中岡　稔

$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ をファイバー空間とし，$B$ はCW複体，$F$ は有限複体とする．$\bar{f}: E \longrightarrow E$ を恒等写像 id : $B \longrightarrow B$ 上のファイバーを保つ連続写像とし，$f = \bar{f} | F : F \longrightarrow F$ のLefschetz数を $\lambda_f$ で表わす．このとき，準同型 $\tau_f : H^*(E) \longrightarrow H^*(B)$ であって，$\tau_f \circ p^* : H^*(B) \longrightarrow H^*(B)$ は $\lambda_f$ 倍する写像となるものの存在することはBecker-Casson-Gottliebにより示されている（[1]）．$\tau_f$ は <u>fixed point transfer</u> とよばれている．$\tau_f \neq 0$ ならば $\bar{f}$ は不動点をもつからである．

この小論では，彼等の仕事をほんの少しmodifyすることにより，ファイバーが多様体で向きのつくファイバー空間の場合には上のtransferを一般化したcoincidence transferとよばれるべき準同型が存在すること，および同変写像のLefschetz数に関する定理が得られることを示そう．

以下, $M_1$, $M_2$ は連結で向きのついた閉じた位相多様体とし, それらはともに $n$ 次元であるとする. このとき連続写像 $f, g: M_1 \to M_2$ に対し, 合成

$$H^*(M_1; \mathbf{Q}) \xrightarrow{f_!} H^*(M_2; \mathbf{Q}) \xrightarrow{g^*} H^*(M_1; \mathbf{Q})$$

($f_!$ は Gysin 準同型) を考え, この写像の Lefschetz 数を $\lambda_{f,g}$ で表わす. $f$ または $g$ が恒等写像のときは $\lambda_{f,g}$ は通常の $\lambda_g$ または $\lambda_f$ に一致し, $U_2' \in H^n(M_2 \times M_2)$ を $M_2$ の対角コホモロジー類とするとき,

$$(1) \qquad \lambda_{f,g} = \langle (f, g)^* U_2', \ [M_1] \rangle \in \mathbf{Z}$$

が成り立つ. また, $\lambda_{f,g} \neq 0$ ならば $f$ と $g$ は coincidence (すなわち $f(x) = g(x)$ となる点 $x \in M_1$) をもつ. ([2] 参照.)

さて, 同一の底空間 $B$ 上の 2つの局所自明なファイバー空間

$$M_1 \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{p_1} B, \qquad M_2 \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{p_2} B$$

が与えられたとし,

$$\bar{f}, \bar{g}: E_1 \longrightarrow E_2$$

を恒等写像 $id: B \to B$ 上のファイバーを保つ連続写像とする. $f, g: M_1 \to M_2$ は $\bar{f}, \bar{g}$ のファイバー上への制限を表わすとする.

<u>補題</u> $\pi_1(B)$ の $H^n(M_1)$, $H^n(M_2)$ 上への作用が自明なら

ば, $H^n(E_1)$ の元 $\Lambda_{f,g}$ で

$$< i_1^*(\Lambda_{f,g}),\ {}^\circ[M_1] > = \lambda_{f,g}$$

をみたすものが存在する.

実際, Thom 同型

$$\phi_i : H^q(E_i) \cong H^{q+n}(E_i \times_B E_i,\ E_i \times_B E_i - d E_i)$$

($d$ は対角写像) を考え,

$$\bar{U}_i = \phi_i(1), \qquad \bar{U}_i' = \bar{U}_i \mid E_i \times_B E_i$$

とおけば ($i=1, 2$), (1) より

$$\Lambda_{f,g} = \phi_1^{-1}(\bar{U}_1 \smile (\bar{f} \times \bar{g})^* \bar{U}_2')$$

は求めるものであることがわかる.

次の定理の $\tau_{\bar{f},\bar{g}}$ を <u>Coincidence transfer</u> とよぼう.

<u>定理 1</u> $\pi_1(B)$ の $H^n(M_1)$, $H^n(M_2)$ 上への作用が自明ならば, 準同形

$$\tau_{\bar{f},\bar{g}} : H^*(E_1) \longrightarrow H^*(B)$$

で, $\tau_{\bar{f},\bar{g}} \circ p_1^* : H^*(B) \longrightarrow H^*(B)$ は $\lambda_{f,g}$ 倍する写像となるものが存在する。

実際,

$$\tau_{\bar{f},\bar{g}}(\alpha) = p_{1!}(\alpha \smile \Lambda_{f,g}) \qquad (\alpha \in H^*(B))$$

と定義すればよい.

<u>注意 1.</u> 冒頭に述べた fixed point transfer の存在定理は $p_1 = p_2$ で $\bar{g} = id$ の場合の定理 1 を基幹として, 順

次に一般化することによって導かれるのであるが（[3]），それを真似て定理1をもっと一般化する（例えば$\pi_1(B)$の作用に関する仮定をとる）ことはできない．

注意2.　Bが有限複体の場合には fixed point transfer は S写像で実現でき，したがってそれは一般コホモロジーに対しても定義でき非常に価値のある応用をもつが[4]，coincidence transfer がS写像で実現できるかどうかについては筆者は知らない．

上に述べた補題よりまた次の定理が得られる．

定理2.　有限群Gが$M_1$, $M_2$上に向きを保つ同相写像によって作用し，Gの$M_1$上への作用は自由と仮定する．$f, g: M_1 \longrightarrow M_2$を同変写像とするとき，$\lambda_{f,g}$はGの位数$|G|$で割り切れる．

実際，ファイバー空間

$$M_1 \xrightarrow{i_1} E_G \underset{G}{\times} M_1 \xrightarrow{p_1} B_G, \quad M_2 \xrightarrow{i_2} E_G \underset{G}{\times} M_2 \xrightarrow{p_2} B_G$$

とファイバーを保つ連続写像

$$\bar{f} = id \underset{G}{\times} f, \quad \bar{g} = id \underset{G}{\times} g : E_G \underset{G}{\times} M_1 \longrightarrow E_G \underset{G}{\times} M_2$$

に対し，補題を適用して得られる$\Lambda_{f,g} \in H^n(E_G \underset{G}{\times} M_1)$を$H^n(M_1/G)$の元とみなせば，

$$< p_1^*(\Lambda_{f,g}),\ [M_1] > = \lambda_{f,g}$$

が成り立つから，求める結果が得られる．

系1. 定理2の仮定に加えて，さらに $M_1$ はホモロジー球面と仮定する．このとき同変写像 $f: M_1 \to M_2$ の写像度は $|G|$ を法としてすべて同じである．

とくに

系2. $M$ を有限群 $G$ が自由に作用するホモロジー球面とするとき，同変写像 $f: M \to M$ の写像度は $1$ mod $|G|$ である．

注意. 系2はホモトピー球面の場合には[5]で別の方法で示されている．

最後に，定理2に関連して次のことを注意しておこう．$M$ を連結で向きのついた閉多様体とし，その上に有限群 $G$ が向きを保って自由に作用しているとき，同変写像 $f: M \to M$ の Lefschetz 数 $\lambda_f$ は $|G|$ の倍数であることが定理2より得られるが，$G$ が Artin-Tate 群（すなわち $G$ の可換部分群はすべて巡回群であるような有限群）のときは，同様のことが任意の有限複体に対して成り立つ．すなわち

定理3. 有限複体 $X$ 上に Artin-Tate 群 $G$ が自由に作用しているとき，同変写像 $f: X \to X$ の Lefschetz 数は $|G|$ で割り切れる．

実際，ファイバー空間 $X \xrightarrow{i} E_G \times_G X \xrightarrow{p} B_G$ と写像

$\tilde{f} = id \times_G f$ に対し冒頭の定理を適用すれば，

$$\tau_{\tilde{f}} \circ p^* = \lambda_f : H^*(B_G) \longrightarrow H^*(B_G)$$

となる準同型 $\tau_{\tilde{f}} : H^*(E_G \times_G X) \longrightarrow H^*(B_G)$ が存在するが，十分大きな $q$ に対しては $H^q(E_G \times_G X) = H^q(X/G) = 0$ で，また，$G$ が Artin-Tate 群であることより $H^q(B_G) = \mathbb{Z}_{|G|}$ となる $q$ が無限に存在するから（[2]），$\lambda_f \equiv 0 \mod |G|$ が成り立つ．

<u>注意</u>　定理3は $G$ が有限巡回群の場合は[6]で示されている．また，$G$ が有限巡回群で $f = id$ の場合はもっと古典的で[7]で示されている．

## 文　献


[1] Becker-Casson-Gottlieb: The Lefschetz number and fibre preserving maps. Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975).

[2] 中岡稔：不動点定理とその周辺（岩波書店），1977.

[3] Gottlieb: Fibre bundles and the Euler characteristic. J. Diff. Geom. 10 (1975).

[4] Becker-Gottlieb: The transfer map and fibre bundles, Topology 14 (1975).

[5] Rubinsztein: On the equivariant homotopy of spheres, Dissertationes Mathematicae 134 (1976).

[6] Casson-Gottlieb: Fibrations with compact fibres, Amer. J. Math. 99 (1975).

[7] Floyd: On periodic maps and the Euler characteristics of associated spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952).