数理解析研究所講究録
第320巻 1978年 46-51

C*環に作用するある種の作用素が生成するバナハ環の半単純性

東北大 教養　　岡安隆照

フォン・ノイマン環Mの正規元 a, b と，それらのスペクトル $Sp(a)$, $Sp(b)$ の上で定義された複素数値連続関数 f_j, g_j $(j=1,\cdots,n)$ に対して，M上の作用素

$$\tau: x \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} f_j(a)\, x\, g_j(b)$$

を考える．そしてこれがMの強稠密部分C*環Aを不変にしているとする．このとき τ をAに制限して得られるA上の作用素 $\tau|_A$ は，Aの恒等作用素 ι_A と共にどんなバナハ環を生成するであろうか．Mが semi-finite ならばそれが半単純になることを示すのがこの講演の目的である．

1. 先ず次の補題から出発する：

<u>補題</u> (cf. [1, Remark, p.165], [2, Lem. 2.3.10], [3 : Th. 10])

$$Sp_{B(M)}(\tau) = \bigcap_{C\in\mathcal{C}} \bigcup_{e\in C} \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(\lambda) g_j(\mu) : \begin{array}{l} \lambda \in Sp_{Me}(ae) \\ \mu \in Sp_{Me}(be) \end{array} \right\},$$

ここに $\mathcal{C}$ はMに関する1の有限中心分割（即ち，互いに直交し，和が1であるようなMの中心射影 $\neq 0$ の有限集合）の集合である．

$\leqq$ は容易である. いま右辺から ν をとり, 任意に $\varepsilon>0$ を与える. $Sp(a)$ の有限ボレル分割 Γ, $Sp(b)$ の有限ボレル分割 Δ が

$$\lambda\in\gamma\in\Gamma \longrightarrow \|(f_j(a)-f_j(\lambda))e_a(\gamma)\|<\varepsilon, \text{ かつ}$$
$$\mu\in\delta\in\Delta \longrightarrow \|e_b(\delta)(g_j(b)-g_j(\mu))\|<\varepsilon,$$
$$j=1,\cdots,n$$

を満たして存在する. ここに e_a, e_b はそれぞれ a, b のスペクトル測度である. この Γ, Δ に対して $C\in\mathcal{C}$ を
$e\in C \longrightarrow e\leqq z(e_a(\gamma))$ または $ez(e_a(\gamma))=0\ \forall\gamma\in\Gamma$, かつ $e\leqq z(e_b(\delta))$ または $ez(e_b(\delta))=0\ \forall\delta\in\Delta$
となるように細かくとれば, ある $e\in C$ に対して

$$\nu=\sum_{j=1}^{n} f_j(\lambda)g_j(\mu),\quad \begin{array}{l}\lambda\in Sp_{M_e}(ae)\\ \mu\in Sp_{M_e}(be)\end{array}$$

である一方, $\lambda\in\gamma\in\Gamma$ なる γ と $\mu\in\delta\in\Delta$ なる δ とに対して $0\neq e\leqq z(e_a(\gamma))z(e_b(\delta))$ である. 従って M の partial isometry $v\neq 0$ で, $vv^*\leqq e_a(\gamma)$, $v^*v\leqq e_b(\delta)$ を満たすものがある. この v に対して

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} f_j(a)vg_j(b)-v\Big\|\leqq\sum_{j=1}^{n}\Big(\|(f_j(a)-f_j(\lambda))e_a(\gamma)\|\|g_j(b)\|+|f_j(\lambda)|\|e_b(\delta)(g_j(b)-g_j(\mu))\|\Big)$$
$$\leqq\varepsilon n\Big(\max_j|f_j(\lambda)|+\max_j\|g_j(b)\|\Big)$$

である. 右辺はいか程でも小さく出来るから $\nu\in Sp_{B(M)}(\tau)$ である.

2. B を $\tau|_A$ と ι_A が生成したバナハ環とする. $\tau|_A$ が B で正則なら τ も $B(M)$ で正則で τ' は M の有界部分で強連続で

あることがわかる：$\sigma=(\tau|_A)^{-1}\in\mathcal{B}$ であるから，複素数係数の多項式の列 $\{p_\nu\}$ で $\sigma_\nu=p_\nu(\tau)|_A \xrightarrow[\|\ \|]{} \sigma$ を満たすものが存在する．いま有界な $\{x_\alpha\}\subset A$ が 0 に強収束しているとすれば任意の ν と任意のベクトル ξ に対して

$$\|\sigma(x_\alpha)\xi\| \leqq \|(\sigma-\sigma_\nu)(x_\alpha)\xi\|+\|\sigma_\nu(x_\alpha)\xi\| \leqq \|\sigma-\sigma_\nu\|\|\xi\|\sup_\alpha\|x_\alpha\|+\|\sigma_\nu(x_\alpha)\xi\|$$

であるから，$\overline{\lim_\alpha}\|\sigma(x_\alpha)\xi\|=0$ である．換言すれば $\sigma(x_\alpha) \xrightarrow[\text{強}]{} 0$．よって σ は A の有界部分で M の強位相に関して連続であることがわかった．そうすると Kaplansky の稠密定理を利用して σ を M 上に拡張できる．実際任意の $x\in M$ に対して有界な $\{x_\alpha\}\subset A$ で x に強収束するものがあるが，$\{\sigma(x_\alpha)\}$ が有界かつ強 Cauchy 列になるから，M におけるその強極限を $\tilde{\sigma}(x)$ とおけば $\tilde{\sigma}$ は σ の拡張である．のみならず，$\sigma\tau|_A=\tau|_A\sigma=1_A$ から $\tilde{\sigma}\tau=\tau\tilde{\sigma}=1$ である．更に $p_\nu(\tau)$ が $\tilde{\sigma}$ にノルム収束することもわかり，$\tilde{\sigma}$ は M の有界部分で強連続になる．

3. φ を M_+ 上の faithful normal semi-finite trace，$\mathfrak{m}$ をその定義イデアル，$\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{m}$ の平方根，η を $\mathfrak{n}$ から $H=L^2(M,\varphi)$ への injection，$\pi(a)$，$\pi'(a)$ $(a\in M)$ を

$$\pi(a)\eta(x)=\eta(ax),\quad \pi'(a)\eta(x)=\eta(xa),\quad x\in\mathfrak{n}$$

によって定まる H 上の作用素とする．$\sum_{j=1}^{n}\pi(f_j(a))\pi'(g_j(a))$ が H 上の正規作用素であることは自明であるが，1-2節の議論から

更に

$$
\begin{aligned}
sp_B(\tau|_A) &\supseteq sp_{B(M)}(\tau) \\
&= \bigcap_{C\in\mathcal{C}} \bigcup_{e\in C} \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(\lambda) g_j(\mu) : \begin{array}{l} \lambda \in sp_{M_e}(ae) \\ \mu \in sp_{M_e}(be) \end{array} \right\} \\
&= \bigcap_{C\in\mathcal{C}} \bigcup_{e\in C} \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(\lambda) g_j(\mu) : \begin{array}{l} \lambda \in sp(\pi(a)_{\pi(e)}) \\ \mu \in sp(\pi'(b)_{\pi'(e)}) \end{array} \right\} \\
&\supseteq sp\Big(\sum_{j=1}^{n} \pi(f_j(a))\pi'(g_j(b)) \Big)
\end{aligned}
$$

である。従って

$$
\|\tau|_A\| \geq \|\tau|_A\|_{sp} \geq \Big\| \sum_{j=1}^{n} \pi(f_j(a))\pi'(g_j(b)) \Big\|_{sp} = \Big\| \sum_{j=1}^{n} \pi(f_j(a))\pi'(g_j(b)) \Big\|
$$

である。右辺の $\| \ \|$ の中味を $\Phi(\tau|_A)$ と書くことにする。さて $\sigma \in B$, $\|\sigma\|_{sp} = 0$ としよう。すると複素数係数の多項式の列 $\{p_\nu\}$ があって $\sigma_\nu = p_\nu(\tau)|_A \xrightarrow[\|\ \|]{} \sigma$ を満たす。よって $\{\sigma_\nu\}$ は Cauchy 列である。σ_ν は上の $\tau|_A$ と同じ形をもつから上の不等式を満たす。従って $\{\Phi(\sigma_\nu)\}$ もまた Cauchy 列である。よって H 上のある正規作用素 $\tilde{\Phi}(\sigma)$ にノルム収束する。このときスペクトルの連続性によって

$$
\|\sigma\| \geq \|\sigma\|_{sp} \geq \|\tilde{\Phi}(\sigma)\|
$$

が成り立っている。故に $\tilde{\Phi}(\sigma) = 0$ である。ところで前節における議論と同様に $\{p_\nu(\tau)\}$ は $\hat{\sigma}|_A = \sigma$ なる $\hat{\sigma} \in B(M)$ にノルム収束することがわかる。それは M の有界部分で強連続である。任意の $x \in \mathfrak{m}$ を固定しよう。$p_\nu(\tau)(x) \xrightarrow[\|\ \|]{} \hat{\sigma}(x)$ かつ $\eta(p_\nu(\tau)(x)) = \Phi(\sigma_\nu)\eta(x) \xrightarrow[\|\ \|]{} 0$ であるから、φ が σ 弱下半連続であることにより

$$0 \leqq \varphi(\tilde{\sigma}(x)^*\tilde{\sigma}(x)) \leqq \underline{\lim}_{\nu}\, \varphi(p_\nu(\tau)(x)^* p_\nu(\tau)(x)) = \underline{\lim}_{\nu} \|\eta(p_\nu(\tau)(x))\|^2 = 0.$$

故に $\tilde{\sigma}(x) \in \mathfrak{n}$ であるのみならず $\eta(\tilde{\sigma}(x)) = 0$，従って又 $\tilde{\sigma}(x) = 0$ である．$\mathfrak{n}$ が M で σ 弱稠密であることから $\tilde{\sigma} = 0$ である．従って特に $\sigma = 0$ である．よって目的の定理が示された：

<u>定理</u>　B は半単純である．

4.　C^*環 A の有界微分や弱内部自己同型写像は上に述べた $\tau|_A$ の形をしている．このことが $\tau|_A$ をとりあげた理由である．ここでは応用を２つほど：

<u>系 1.</u>　C^*環 A の *微分 δ が ι_A と共に生成するバナハ環は半単純である．

<u>系 2.</u>　C^*環 A の正規自己同型写像 α（即ち $\alpha'\alpha = \alpha\alpha'$ を満たす自己同型写像，ここに $\alpha'(x^*) = \alpha^{-1}(x)^*$, $x \in A$ [4]）が"十分多くの A の極大イデアルを不変にすれば"，それが ι_A と共に生成するバナハ環は半単純である．

証明は省く．

なお以上述べてきた議論は Størmer [5] と深い関係をもっている．

文　献

1. D. Buchholz and J. E. Roberts, Comm. Math. Phys. 49 (1976), 161–177.

2. A. Connes, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 6 (1973), 133–252.

3. G. Lumer and M. Rosenblum, Proc. AMS 10 (1959), 32–41.

4. T. Okayasu, Tôhoku Math. J. 26 (1974), 541–554.

5. E. Størmer, On spectral subspaces of automorphisms, To appear.