数理解析研究所講究録
第 320 巻 1978 年 119-134

C^*-algebra の regular σ-completion と AW^*-factor of Type III

東北大 理　斎藤和之

W^*-algebra の代数的抽象化として始まった AW^*-algebra の研究 [ ] は，1970年 O. Takenouchi，Dyer による non W^*，AW^*-factors の構成，さらに 1976年 J. D. Maitland Wright による Simple，separable infinite dimensional (unital) C^*-algebra の regular σ-completion としての non W^*，AW^* factor of Type III の構成へと発展した。従って今後の課題は，"non W^*，AW^* factor を自然な方法で構成しその代数型の決定及び分類をすること" であろう。　この講演では，上の観点から，Wright による "regular σ-completion" O. Takenouchi による接合積，あるいは Dyer による構成 及び筆者の最近の結果等をあわせて報告することにする。　詳しい文献は末尾を参照されたい。

§1 では後に必要な AW^* factor の type の判定定理を述べ [6]
§2 で J. D. M. Wright に従って C^*-algebra の regular σ-completion による AW^* factor の構成を紹介し §3 では，Takenouchi，Dyer に

よる構成を紹介し§1の判定定理によってそれらが type Ⅲ, monotone closed な AW^*-factors であること及びそれらの相互関係（Dyer の構成法と O. Takenouchi による接合積）を調べた筆者の結果を述べる。

§1 AW^*-algebra からの準備（type の判定定理）.

1. M を monotone σ-complete AW^*-algebra とする。i.e. M の hermitian part M_h の bounded above な increasing sequence $\{x_n\}$ は, M_h の中で supremum x をもつ（$x_n \uparrow x$ or $x = \bigvee_{n=1}^{\infty} x_n$）。

<u>Lemma</u> M が monotone σ-complete AW^*-algebra とする。$\{f_n\} \subset M_p$（M の projections 全体）を increasing sequence of projections in M とする。$\operatorname{Sup}_n f_n$ を M_p に於ける $\{f_n\}$ の supremum とし, $\bigvee_{n=1}^{\infty} f_n$ を M_h のそれとすると, $\bigvee_{n=1}^{\infty} f_n = \operatorname{Sup}_n f_n$ & $a^* f_n a \uparrow a^*(\operatorname{Sup}_n f_n)a$ (order) for $\forall a \in M$ である。

proof. $b = \bigvee_{n=1}^{\infty} f_n$ は $0 \leq b \leq 1$ より $0 \leq f_n \leq b \leq \operatorname{Sup}_n f_n$ $\forall n$ に注意して, $f_n \leq LP(b) \leq \operatorname{Sup}_n f_n$ ($\forall n$) 故に $LP(b) = \operatorname{Sup}_n f_n$. 一方 $f_n b = f_n$ $\forall n$ より $LP(b) = b\,LP(b) = b$ i.e. $\operatorname{Sup}_n f_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} f_n$. 従って, Kadison - Pedersen [2] の議論によって, $\forall a \in M$ に対し, $a^* f_n a \uparrow a^*(\operatorname{Sup}_n f_n)a$ (in M_h) が成立する。//

<u>Theorem</u> ([6]). M を monotone σ-complete AW^*-factor とし, φ を M 上の faithful state（存在を仮定！）とする。もし M

が semi-finite ならば，それは W^*-factor 従って，M が non W^* ならば，M は type III である。

proof. M が semi-finite とすると，$\exists e \in M_p$ non-zero finite projection である。今それを1つ固定する。$N = eMe$ は finite AW^* factor で $\psi(exe) = \phi(exe)/\phi(e)$ は N 上の faithful state である。

故に [12] によれば，N は W^*-algebra. i.e. $\exists (\pi_e, \mathfrak{H}_e)$: faithful W^*-representation of N on $\mathfrak{H}_e$ i.e. $\pi_e(N) \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H}_e)$ weakly closed $*$-subalgebra with unit $1_{\mathfrak{H}_e}$ である。今 $\{e_n\}$ を M_p の any decreasing sequence : $e_n \downarrow 0$ とすれば，Lemma より $ee_ne \downarrow 0$ in N_h. より $\pi_e(ee_ne) \downarrow 0$ strongly in $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_e)$ である。$\Phi_e(x) = exe$ $\forall x \in M$ として，$\xi \in \mathfrak{H}_e$ ($\|\xi\| = 1$) として，$\omega_\xi \circ \pi_e \circ \Phi_e$ は M 上の c. a. state となる。又 $\{\omega_\xi \circ \pi_e \circ \Phi_e$, e: finite $\neq 0$ projection in M$\}$ は，M 上の separating family of c. a. states である。(M は σ-finite である!) よって [5] によれば，M は faithful W^*-representation をもちよって，M は W^* factor である。//

注意. 同様の結果が J. D. M. Wright によって得られている([13])。

§2 C^*-algebra の regular σ-completion の一般論とIII型，non W^*，AW^* factor. 以下 J. D. M. Wright [9, 10, 11, 12] に従ってその内容を紹介する。以下特にことわらぬ限り C^*-algebra は unital とする。unital でない場合は次の機会に報告する [7]。

1. C^*-algebras の Baire *-envelope について. A: unital C^*-algebra acting on the <u>universal</u> Hilbert space H, A'' は A の $\mathcal{B}(H)$ に於ける weak closure (A の second dual A^{**} と *-isomorphic) とする。

<u>Definition</u>. M monotone σ-complete AW^*-algebra とし M_h をその hermitian part とする。$M_h \supset E$ が <u>σ-subspace</u> であるとは, $\forall \{a_n\} \subset E$: bounded monotone increasing sequence に対して, $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n \in E$ となることである。

$(A_0^\infty)_h$ を A_h を含む $\mathcal{B}(H)_h$ の最小の σ-subspace とすれば:

<u>Proposition</u> (Pedersen ~~⟹~~) $A_0^\infty \equiv (A_0^\infty)_h + i(A_0^\infty)_h$ は A'' の C^*-subalgebra である。

<u>Definition</u> A_0^∞ を A の Baire *-envelope と呼ぶことにする。

A_0^∞ は monotone σ-complete C^*-algebra である。(可換の場合の Baire function に相当)

2. null ideal. A_0^∞ に於ける pointwise supremum と algebraic supremum の差をなしくずしにする為に次のような null ideal を導入する (可換の場合 "meager" support の Baire function のつくる ideal に相当)。 X を A の ~~pure~~ states 全体のつくる space で $\sigma(A^*, A)$-topology を入れる。$\partial X \subset X$ の pure states 全体) はこの topology で <u>Baire space</u> となることに注意しよう。 $M^+(A) \equiv \{m;\ m \geq 0,\ m \in A'':\ \{x;\ x \in \partial X,\ m(x) > 0\}$ は ∂X の meager subset$\}$ は A''^+ の positive cone, $N(A)$ を A'' の中での complex linear span of $M^+(A)$

とすると $N(A)$ は A'' の σ-ideal (σ-closed な ideal) である。

$g(A) \equiv A_0^\infty \cap N(A)$ とすると $g(A)$ は次の性質をもっている。

δ を $A_0^\infty \longrightarrow A_0^\infty / g(A)$ の natural quotient map とする ($g(A)$ は A_0^∞ の σ-ideal) とき,

Proposition. $f, g \in A_0^\infty$ に対して,

$$f \leqq g \text{ a.e. } \rightleftarrows \delta(f) \leqq \delta(g)$$

但し $f \leqq g$ a.e. $\overset{\text{def}}{\rightleftarrows}$ $\{x;\ x \in \partial X;\ f(x) > g(x)\}$ meager.

Lemma. (E. Christensen ~~　~~). C を monotone σ-complete C^*-algebra with identity J を proper σ-ideal of C とし, δ' を $C \to C/J$ の canonical map とすれば; C/J は monotone σ-complete 且つ δ' は σ-homomorphism となる。

このことから,

Proposition $A_0^\infty / g(A)$ は, monotone σ-complete C^*-algebra with identity で, quotient map は, σ-homomorphism である。さらに ∂X が Baire-space であることに注意して,

$A \cap g(A) = \{0\}$ i.e. $\delta | A$ は, A into $A_0^\infty / g(A)$ の $*$-monomorphism : $\delta(1) = 1$ である。

3. unital C^*-algebra の regular σ-completion.

Definition A を unital C^*-algebra とする。$(\mathcal{C}, k)$ が A の regular σ-completion であるとは, $\mathcal{C}$ が monotone σ-complete C^*-algebra で, $k : A \longrightarrow \mathcal{C}$ $*$-monomorphism : $k(1) = 1$ 4

(i) $\{a_n\} \subset A_h$ $a_n \downarrow$ with $\bigwedge_A a_n = 0 \Rightarrow \bigwedge_C k(a_n) = 0$

(ii) C は $k(A)$ により σ-generate されている。i.e. C_h が $k(A_h)$ を含む最小の σ-subspace.

(iii) C_h の元 x は、$x = \underset{C}{\mathrm{lub}}\{k(a)\ ;\ a \in A_h\ \ k(a) \leq x\}$
$= \underset{C}{\mathrm{glb}}\{k(b)\ ;\ b \in A_h\ :\ k(b) \geq x\}$

<u>Theorem</u> (J. D. M. Wright) $(A_0^\infty/g(A), g)$ は、A の regular σ-completion である。

proof. まず $(A_0^\infty/g(A), g)$ が A の monotone σ-completion であることを示す。その為には、$g(A_h)$ を含む最小の σ-subspace of $(A_0^\infty/g(A))_h$ が $(A_0^\infty/g(A))_h$ であることを示せばよい。$g(A_h)$ を含む $(A_0^\infty/g(A))_h$ の最小の σ-subspace を W とおこう。$V \equiv \{a \in A_0^\infty{}_h \quad g(a) \in W\}$ は A_0^∞ の σ-subspace で、$A_h \subset V$ 故に $(A_0^\infty)_h \subset V$ 故に $W = (A_0^\infty/g(A))_h$ となる。

次に regularity を示そう。$f \in (A_0^\infty)_h$ に対して、$\{g(a)\ ;\ a \in A_h,\ g(a) \leq g(f)\} \equiv \mathfrak{S}_{g(f)}$ を考える。$g(g)$ を $\mathfrak{S}_{g(f)}$ の upper bound ($g = g^*$ $g \in (A_0^\infty)_h$) i.e. $g(a) \leq g(f)$ $a \in A_h \Rightarrow g(a) \leq g(g)$ とする。$f, g \in (A_0^\infty)_h$ より $f|X$, $g|X$ は、X 上の bounded Baire functions であるから一般論から (Choquet - Bishop - deLeeuw の理論) $\exists\, u, w$: bounded upper semi-continuous concave functions : $f = u$ a.e. $g = w$ a.e. とできる。
従って、$g(a) \in \mathfrak{S}_{g(f)}$ なら $a \leq w$ i.e. $a \leq u \Rightarrow a \leq w$ が成立する。

$\check{u}(x) = \sup\{a(x) \mid a \leq u,\ a \in A_h\}\ \forall x \in X$ と置けば $\check{u} \leq w$

が成立。又一般論により $u = \check{u}$ a.e. 故に $u \leq w$ a.e. である
(convex sets の separation による)

故に $f \leq g$ a.e. よって Proposition から $\mathfrak{g}(f) \leq \mathfrak{g}(g)$ 故に

$\mathfrak{g}(f) = \mathrm{lub}\{g(a) ;\ g(a) \leq \mathfrak{g}(f)\ \ a \in A_h\}$。i.e. $(A_0^\infty/g(A),\ \mathfrak{g})$

は, A の regular σ-completion である。//

注意. 実は, A の regular σ-completion は, 次の意味で <u>unique</u>

(C_1, α_1), (C_2, α_2) を A の regular σ-completions とすると,

$\exists \beta : C_1 \longrightarrow C_2$ *-isomorphism : $\beta\alpha_1 = \alpha_2$ i.e.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & C_1 \arrow[d, "\beta^{\exists}", "*\text{-isomorphism}"'] \\ & C_2 \end{tikzcd}$$

今後 $A_0^\infty/g(A) \equiv \hat{A}$ と書くことにする。$\mathfrak{g}|A = i$ 省略する。

注意すべきことは, A が simple なら $\hat{A}$ も simple である。実際

$J \subset \hat{A}$ proper closed two-sided ideal とすれば, $J \cap A$ も A で proper closed two-sided ideal である。

proof. $1 \notin J \cap A$ もし $J \cap A = \{0\}$ とすれば, $h : \hat{A} \longrightarrow \hat{A}/J$ は quotient homomorphism で, $h_0 = h|A$ は into *-isomorphism : $h_0(1) = 1$

h_0 は isometric bipositive, isomorphism より, $b \in J_h$ $a \in A_h$

$a \leq b$ とすると, $h_0(a) \leq h(b) = 0$ ∴ $h_0(a) \leq 0$ ∴ $a \leq 0$

$b = \mathrm{lub}\{a ;\ a \in A_h\ \ a \leq b\}$ より $b \leq 0$ 同様にして, $-b \in J$

故に $-b \leq 0$ ∴ $b = 0$ 故に $J = \{0\}$ で矛盾である。

4. infinite dimensional simple separable unital C^*-algebra のregular σ-completion について。A は標記の仮定を満すものとし、$\hat{A}$ を A の regular σ-completion とすれば、$\hat{A}$ は countable order dense subset をもつ。i.e. $\exists A_0 \subset \hat{A}_h$ (実は、A_h の中に!) (countable) : $x = \mathrm{lub}\{a \in A_0 \;;\; a \leqq x\}$ $y = \mathrm{glb}\{b \in A_0 \;;\; b \geqq x\}$。

proof. A_0 を A_h の countable norm dense subset A_0 は $1 \in A_0$ 及び finite rational linear combinations に関して closed であるとして一般性を失なわぬ。$\forall a \in A_h$ において $\forall n$ (natural) に対して、$\exists a_n \in A_0$: $\| a - \frac{1}{2}(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}) - a_n \| < \frac{1}{2^{n+2}}$ i.e. $a - \frac{1}{2^n} < a_n < a - \frac{1}{2^{n+1}}$ $\therefore a_n + \frac{1}{2^{n+1}} < a$ により上記のことが示される。

従って、$\hat{A}$ は countable chain condition をもつから σ-finite である。従って、$\hat{A}$ は σ-finite, monotone complete AW^*-factor である。次の proposition によって、$\hat{A}$ の pure states の the space は $\sigma(\hat{A}^*, \hat{A})$-topology で separable である。

Proposition C を C^*-algebra with a countable order dense subset $\{d_n\}$ ($d_n = d_n^*$) をもつとする。∂S (S : C の the state space, ∂S は pure states 全体) は S の relative topology で separable である。

proof. $U_n = \{s \in \partial S \;;\; s(d_n) > 0\}$ は開且つ $\exists n : U_n \neq \phi$. O any non-empty open subset of ∂S, $e \in O$ とすれば、$\exists b \in C_h$:

$e \in \{s ; s \in \partial S ; s(b) > 0\} \subset O$ であった。$N_0 \equiv \{n \in N ; d_n \leqq b\}$

$b = \mathrm{lub}\{d_n ; n \in N_0\}$ より、$e(b) > 0$ により もし $d_n \leqq 0 \ \forall n \in N_0$

なら $\mathrm{l.u.b}\{d_n, n \in N_0\} = b \leqq 0 \ \therefore e(b) \leqq 0$ で矛盾 $\therefore \exists k \in N_0$:

$U_k \neq \phi \ \therefore \ \phi \neq U_k = \{s \in \partial S ; s(d_k) > 0\} \subset \{s \in \partial S, s(b) > 0\}$

$\subset O$ となる。$\{U_k\}_{k \in N}$ の中から1点ずつとり出せば $(\neq \phi)$

∂S の countable $\sigma(\mathcal{C}^*, C)$-dense subset を得る。//

特に C は faithful state をもつ。

以上から $\hat{A}$ は faithful state をもち、しかも $\partial X_{\hat{A}}$ は separable

従って、$\hat{A}$ が W^*-factor ならば minimal projection をもつことに

なり $\hat{A}$ は type I, not finite dimensional より、not simple となり矛盾

よって、$\hat{A}$ は faithful state をもつから最初の判定定理より

$\hat{A}$ は type III である。i.e. $\hat{A}$ は non W^*, monotone closed AW^* factor

of type III である。A としては Glimm の UHF-algebra とか two-generator

の free group からつくられる group C^*-algebra とすればよい。

以上が J. D. M. Wright の構成のあらましである。詳しくは

[9, 10, 11, 12] を参照。

§3 Cross product construction 並びに Dyer's construction による

III型の AW^*-factor の構成.

以下 O. Takenouchi [8] に従って、cross product construction

の概略を述べる。Z を abelian AW^*-algebra, G を Z の $*$-

automorphismsのつくる a group, $a \to a^g$ を $\mathcal{G}$ の action とする。I. Kaplansky [3] に従って、AW*-module $\mathfrak{M}$ をつくる。$\mathfrak{M} = \{ x = (x_g) ;\ x_g \in Z\ \forall g\ \ \sum x_g^* x_g \in Z$ (Z で order 収束)$\}$ とすれば $\mathfrak{M}$ は canonical な内積により Z 上の faithful AW*-module であり $\mathcal{B}(\mathfrak{M})$ は $\mathfrak{M}$ 上の bounded module endomorphisms 全体のつくる type I AW*-algebra with center Z (monotone closed) とする。

$\mathcal{B}(\mathfrak{M})$ の元は次のように行列表現できる。$\mathfrak{M}$ の "c n o s" $\{u_g\}$ ($u_{g_0} = (\delta_{g,g_0} 1)$) に対して、$(A u_h, u_g) = a_{g,h}\ \forall g, h$ とする。

$\mathbb{M}(Z, G) \equiv \{ A \in \mathcal{B}(\mathfrak{M})\ ;\ a_{g,h} = a_{gh^{-1},e}\ \ \forall g, h \in G \}$ とすると、$\mathbb{M}(Z, G)$ は "weakly closed" である。従って、$\mathcal{B}(\mathfrak{M})$ の自然な AW*-algebra の構造を $\mathbb{M}(Z, G)$ に制限して、$\mathbb{M}(Z, G)$ は monotone closed AW*-algebra である。($\mathcal{B}(\mathfrak{M})$ の AW*-subalgebra)

G の Z 上の action に関して、

(F) $p \in Z_p$: absolutely fixed ならば $p = 0$ i.e. $\forall q \in Z_p\ q \leq p$ に対して、$q^g = q\ \forall g \in G \Rightarrow p = 0$,

(E) $a^g = a\ \ \forall g \in G\ \ a \in Z \Rightarrow a = \lambda 1$ λ スカラー

という仮定のもとに $\mathbb{M}$ は $\{ L_a, a \in Z \} = \hat{Z}$ を maximal abelian *-subalgebra とする factor である。但し $L_a \in \mathcal{B}(\mathfrak{M})$ は、$L_a : (x_g) \longrightarrow (a^g x_g)$ $(x_g) \in \mathfrak{M}$ $a \in Z$ によって定義される $\mathfrak{M}$ の bounded module endomorphism である。

(Z, G) の例として $Z = B^\infty[0, 1)/\sim$ ($[0, 1)$ 上の bounded

Baire functionsのつくる C^*-algebraを meager setをsupportにもつfunctionsのσ-idealで割った AW^*-algebra.) $G = G_\theta$ 但し G_θは $\{m + n\theta ; m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ (θ given irrational) により $[0, 1)$ 上の translations (mod 1) の homeomorphisms group を与え これを $\mathcal{Z}$ 上に自然にあげた $*$-automorphism group とする。

<u>Theorem</u> ([8]) $M(\mathcal{Z}, G_\theta)$ は non W^*, AW^*-factor である。

proof. もし $M(\mathcal{Z}, G_\theta)$ が W^* ならば、$\tilde{\mathcal{Z}}$ 従って、$\mathcal{Z}$ が W^* となり矛盾する。

以上が [8] の概略である。次に Dyer の example について説明する。$\mathfrak{A} = B^\infty[0, 1)$、$\mathfrak{g}$ は zero でないところが meager set になっている $\mathfrak{A}$ の元のつくる the ideal とする。$0 \leqq x < 1$ に対して、H: non-separable Hilbert space with cnos $\{e_x \quad 0 \leqq x < 1\}$ とする。$A \in \mathcal{B}(H)$ に対して、

$A_{x,y} = (Ae_y, e_x)$ $A \frown \langle A_{x,y} \rangle : [0, 1) \times [0, 1) \longrightarrow \mathbb{C}$ の関数を対応させる。

$$\mathfrak{A}_1 \equiv \{A ; A \in \mathcal{B}(H) ; A_{x,y} = \delta_{x,y} f(x), \ f \in \mathfrak{A}\}$$

$$\mathfrak{g}_1 \equiv \{ \quad \text{〃} \quad f \in \mathfrak{g}\}$$

$$\mathfrak{A}_0 \equiv \{A \in \mathcal{B}(H) ; \quad A_{x,y} :$$

(1) $A_{x,y} = 0$ except for $y - x = j \cdot 2^{-k}$ for some $k \geqq 1$, $-2^k < j < 2^k$

(2) $k \geqq 1 \quad 0 \leqq i, j < 2^k$ に対しては、

$$f(x) = A_{2^{-k}(i+x), 2^{-k}(j+x)} \in \mathfrak{A} \}$$

$$\mathfrak{g}_0 = \{ A \in \mathcal{B}(H) : A_{x,y} : \begin{array}{l} (1) \quad '' \\ (2) \ f(x) = A_{2^{-k}(i+x),\, 2^{-k}(j+x)} \in \mathfrak{g} \end{array} \}$$

とすれば、$\mathfrak{A}_0$ は C^*-algebra with unit $\mathfrak{g}_0$ は two-sided ideal of $\mathfrak{A}_0$

Theorem (Dyer [1]) $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ は $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{g}_1$ を maximal abelian $*$-subalgebra としてもつ AW^*-factor よって non W^*-である。

$\mathfrak{A}_1/\mathfrak{g}_1 \supseteq \mathfrak{A}/\mathfrak{g} = \mathcal{Z}$ に注意.

次にこれら $\mathbb{M}(Z, G_\theta)$、$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ の type 及びそれらの関係について考察してみよう。[6]

まず $Z = B^\infty[0,1)/\sim$ は、non W^*, abelian AW^*-algebra であるが separable C^*-algebra の regular σ-completion となり従って、countable order dense subset をもち従って、Z は faithful state をもつ。(φ とする.) 実は、$\mathbb{M}(Z, G)$ のつくり方から $\mathbb{M}(Z, G)$ onto $\tilde{Z}$ の faithful positive projection map Φ がある。今 $\psi = \varphi \circ \Phi$ とすると、ψ は $\mathbb{M}(Z, G)$ 上の faithful state 従って、Theorem of §1 により

Theorem ([6]) $\mathbb{M}(Z, G_\theta)$ は、type III, monotone closed σ-finite AW^*-factor である。

同様にして、$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ onto $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{g}_1$ の faithful positive projection map Φ' があり $\psi' = \varphi \circ \Phi'$ とすると $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ は faithful state ψ' をもつ。又つくり方から $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ は monotone σ-complete になるからやはり §1 の判定定理から

Theorem([6]) $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ は monotone (σ-) closed type III σ-finite AW* factor である。

G_0 を $[0,1)$ の dyadic rationals の translates によってつくられる $[0,1)$ の homeomorphism により induce された Z の *-automorphisms group とすると、(Z, G_0) は (E), (F) を満すが

Theorem([6]) $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0 \cong \mathbb{M}(Z, G_0)$ である。従って、$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ は monotone closed である。

証明の概略 $A \in \mathfrak{A}_0$ $A + \mathfrak{g}_0 \in \mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ $A \sim \langle A_{x,y} \rangle$ ならば、$A_{x,y} = 0$ except when $y - x = j \cdot 2^{-k}$ for some $k \geq 1$, $-2^k < j < 2^k$, $k \geq 1$ $0 \leqq i, j < 2^k$: $x \longrightarrow f(x) = A_{2^{-k}(i+x), 2^{-k}(j+x)}$ $(0 \leqq x < 1)$ $\in \mathcal{B}^\infty[0,1) = \mathfrak{A}$。従って、$g \in G_0$ に対して、$A_{\sigma_g(x), x}$ は $[0,1)$ 上の bounded Baire function になる。ϕ を $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{A}/\mathfrak{g}$ の canonical map とすれば、

$$a_{g,e} \overset{\text{def}}{=} \phi(x \longrightarrow A_{\sigma_g(x), x}) \quad \forall g \in G_0$$

として、$a_{g,e}$ は $A \in A + \mathfrak{g}_0$ の撰び方によらない。

$a_{g,h} = (a_{g-h,e})^h$ $\forall g, h \in G_0$ として、$(a_{g,h})$ は $\mathfrak{M}$ 上の bounded module endomorphism $\psi(A + \mathfrak{g}_0)$ を define する。これは、

$$\sum_{g \in G_0} |A_{\sigma_g(x), x}|^2 = \sum_{g \in G_0} |(Ae_x, e_{\sigma_g(x)})|^2$$
$$\leqq \sum_{0 \leqq y < 1} |(Ae_x, e_y)|^2 \leqq \|Ae_x\|^2 \leqq \|A\|^2$$

に注意して、$\forall \xi = (x_g) \in \mathfrak{M}$ に対して、

$\displaystyle\sum_{h \in G_0} \Big| \sum_{g \in G_0} x_g a_{g,h} \Big|^2 \leqq \|A\|^2 \|\xi\|^2$ が成立することによる。

i.e. $A+\mathfrak{g}_0 \longrightarrow \Psi(A+\mathfrak{g}_0)$ は $\Psi(A+\mathfrak{g}_0)_{g,h}=a_{g,h}$ より $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ into $\mathbb{M}(Z,G_0)$ の $*$-isomorphism である。onto を示そう。$\in \mathbb{M}(Z,G_0)$ with $A\sim\langle a_{g,h}\rangle$ とすると $\exists I$: a Baire set contained in a meager set in $[0,1)$: $\forall g,h$ $\exists$ $a_{g,h}\in B^{\infty}[0,1)$:

$$\Big|\sum_{g,h\in G_0}{}' a_{g,h}(x)\xi_h\eta_g\Big| \leq \|A\|\Big(\sum_{h\in G_0}{}'|\xi_h|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{g\in G_0}{}'|\eta_g|^2\Big)^{1/2}$$

$\forall \{\xi_h\},\{\eta_g\}\in \ell^2(G_0)$ $\forall x\in[0,1)\setminus I$

$u_{g,h}(x)$ を
$$a'_{g,h}(x)=a_{g,h}(x) \quad x\in[0,1)\setminus I$$
$$=0 \quad x\in I$$

とすると、$\Big|\sum_{g,h\in G_0}{}' a'_{g,h}(x)\xi_h\eta_g\Big| \leq \|A\|\Big(\sum_{h\in G_0}{}'|\xi_h|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{g\in G_0}{}'|\eta_g|^2\Big)^{1/2}$ $\forall x$ $\forall \{\xi_h\},\{\eta_g\}\in \ell^2(G_0)$。

$\langle A_{x,y}\rangle$ を $A_{x,y}=0$ except when $x-y=j\cdot 2^{-k}$ for some $k\geq 1$, $-2^k<j<2^k$, $A_{\sigma_g(x),x}\equiv a'_{g,e}(x)$ $0\leq x<1$ $g\in G_0$ とすると、$x\longrightarrow A_{2^{-k}(i+x),\,2^{-k}(j+x)}$ は $[0,1)$ 上の bounded Baire function 且つ $\Big|\sum_{\substack{0\leq x<1\\0\leq y<1}}{}' A_{x,y}\xi_x\eta_y\Big|\leq\|A\|\|\xi\|\|\eta\|$ $\forall$ $\xi=(\xi_x)$, $\eta=(\eta_x)\in$ 故にこれは $\mathfrak{A}_0$ の元 B を決定し、$(Be_y,e_x)=A_{x,y}$ $\forall x,y$。
$\therefore$ $\Psi(B+\mathfrak{g}_0)=A$ は容易 $\therefore$ $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0\cong\mathbb{M}(Z,G_0)$ である。//

§4. 注意 1. 実は、今までの、$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0\,(\cong\mathbb{M}(Z,G_0))$, $\mathbb{M}(Z,G_0)$, $\mathcal{A}$ はみな finite だが "very big" である。i.e. 如何る non-trivial な separable な表現をもたない。実際 もし右のような

表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ をもてば、上のⅢ型 σ-finite AW*-factor は皆 Simple であるから、π は faithful、又 $\mathfrak{H}$ が separable より π は projections と completely additive i.e. 上の example は c.a. states を充分沢山もつことになり Pedersen [ ] によれば W*-algebra となる。これは矛盾である。

2. 我々は $\mathbb{M}(Z, G_\theta)$, $M(Z, G_0)$, $\hat{A}$ (simple C*-algebra A) を得たがこれらの関係はどのようになるか？が次の問題である。又前にもちょっとふれたが identity をもたない C*-algebra の regular σ-completion とか又の structure theory 等いろいろ問題があるがこれは次の機会にゆずりたい。[7]

以上.

参考文献

[1] J. Dyer, Concerning AW*-algebras, To appear in J. Functional Anal..

[2] R. V. Kadison and G. K. Pedersen, Equivalence in operator algebras, Math. Scand., (1970), 205-222.

[3] I. Kaplansky, modules over operator algebras, Amer. J. Math., 75 (1953), 839-858.

[4] G. K. Pedersen, Operator algebras with weakly closed abelian subalgebras, Bull. London. Math. Soc., 4 (1972), 171-175.

[5]. K. Saitô, A non commutative theory of integration for a semi-finite AW^*-algebra and a problem of Feldman, Tôhoku Math. J., 22 (1970), 420-461.

[6]. ______, AW^* algebras with monotone convergence property and examples by Takenouchi and Dyer, To appear in Tôhoku Math. J.,

[7] ______, On a structure theory of regular σ-completion of C^*-algebras (仮題) 準備中.

[8] O. Takenouchi, Preprint, 1970.

[9] J. D. Maitland Wright, On minimal σ-completions of C^*-algebras, Bull. London Math. Soc., 6 (1974), 168-174.

[10] ______, Regular σ-completions of C^*-algebras, J. London Math. Soc., 12 (1976), 299-309.

[11] ______, On AW^*-algebras of finite type, J. London Math. Soc., 12 (1976), 431-439.

[12] ______, Wild AW^*-factors and Kaplansky-Rickart algebras, J. London Math. Soc., 13 (1976).

[13] ______, On semi-finite AW^*-algebras, Math. Proc. Camb. phil. Soc. (1975), 79 443-445.