数理解析研究所講究録
第 323 巻 1978 年 31-38

Hardy Class, N Class

千葉大 理　　柳原二郎

Hardy class や N class について，述べるべきことは多いが，ここでは 合成作用素 とそれに関連した関数方程式を考えよう．

1．序論

D は単位円板 $|z|<1$ とし，D で正則な関数 $f(z)$ が，条件

$$|f|^p \text{ が harmonic majorant をもつ}$$

をみたすとき H^p class に属するといい，条件

$$|f| \text{ が有界な harmonic majorant をもつ}$$

をみたすとき H^∞ class に属するという．また，条件

$$\log^+|f| \text{ が harmonic majorant をもつ}$$

をみたすとき N class に属するといい，条件

$$\log^+|f| \text{ が準有界な harmonic majorant をもつ}$$

をみたすとき N^+ class に属するという．また

$$M=\{\phi\in H^\infty;\ |\phi(z)|<1 \ \text{ for } z\in D\}$$

とおく．$\phi\in M$ をとる．D で正則な関数 g に対し

$C_\phi g=g\circ\phi$ ，すなわち $(C_\phi g)(z)=g(\phi(z))$

とおく．C_ϕ を，ϕ に対応する合成作用素という．

C_ϕ は $H^p\to H^p$ の連続な線形作用素である［5, P. 348, 定理1］，［1, P. 29, 系］．また

定理 1.1. C_ϕ は $N^+\to N^+$ の連続な準同型で，ϕ が定数関数でなければ C_ϕ は 1対1 である．逆に N^+ を N^+ の中にうつす連続な準同型は，合成作用素に限る．

（N^+ には $\rho(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(1+|f(e^{i\theta})-g(e^{i\theta})|)\,d\theta$ として距離が入っており，N^+ は位相代数となっている．）

証明．後半だけを示そう．κ を N^+ の連続な準同型とする．$f\in N^+-\ker(\kappa)$ をとると $\kappa f=\kappa(1\cdot f)=\kappa 1\cdot\kappa f$．よって $\kappa 1=1$．いま $\kappa z=\phi\in N^+$ とおく．a を $|a|\geq 1$ な任意の数とすれば，$(z-a)^{-1}\in N^+$ であるから $\kappa(z-a)\kappa(\frac{1}{z-a})=1$，ゆえに $\kappa(z-a)=\kappa z-\kappa a=\phi-a$ は D 内で 0 とならず，従って $|\phi(z)|<1$ for $z\in D$，すなわち $\phi\in M$.

$f(z)=\sum a_n z^n\in N^+$ に対し，$0<r<1$ をとって $f_r(z)=f(rz)$ とおく．すると $(\kappa f_r)(z)=\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k r^k z^k)=\lim_{n\to\infty}\sum^{n} a_k r^k \phi^k$ $=(f_r\circ\phi)(z)=(C_\phi f_r)(z)$．$r\to 1$ のとき $f_r\to f$ ゆえ $\kappa f=C_\phi f$ となる．証終．

2. 完全連続な合成作用素

S_1, S_2 は完備な位相線形空間とする．$T: S_1 \to S_2$ は線形かつ連続とする．S_1 での 0 の適当な近傍 U があって TU が S_2 で相対コンパクトとなるとき，T を完全連続という．

補題 2.1. C_φ が H^p 上（または N^+ 上）で完全連続ならば，ほとんどすべての t に対し $|\varphi(e^{it})| < 1$.

証明は［6, P.477, 命題 1.6(b)］をみよ．

補題 2.2. $f \in H^p$（または N^+）で，$\varphi \in M$ ならば

$$(f \circ \varphi)(e^{it}) = f(\varphi(e^{it})) \quad a.e.$$

証明は［5, P.350, 定理 2］をみよ．

Shapiro - Taylor［6］は C_φ が完全連続になるための条件をいろいろと調べている．たとえば

定理 2.3. C_φ が H^2 上 Hilbert-Schmidt 型となるための必要十分条件は，φ が

$$\int_0^{2\pi} [1 - |\varphi(e^{it})|]^{-1} dt < \infty \tag{2.1}$$

をみたすことである［6, P.481, 定理 3.1］．

定理 2.4. C_φ が，ある $p < \infty$ に対し，H^p 上で完全連続ならば，すべての $p < \infty$ に対し，H^p 上で完全連続である［6, P.492, 定理 6.1］．

N^+ 上では，完全連続となるための必要十分条件が求められる．すなわち

定理 2.5. C_φ が N^+ 上で完全連続であるための条件は

(2.2) $$|\varphi(e^{it})|<1 \qquad \text{a.e.}$$

であってかつ，各 θ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ に対し

(2.3) $$\frac{e^{i\theta}+\varphi(z)}{e^{i\theta}-\varphi(z)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,k_\theta(t)\,dt+i\alpha(\theta)$$

が成り立つことである．ここで $\alpha(\theta)$ は実数値の連続関数，$k_\theta(t)$ は $k_\theta(t)\geqq 0$ でかつ θ に関して一様に可積分（すなわち，$^\forall\varepsilon>0$ に対し $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ あって，$\mathrm{meas}(E)<\delta$, $E\subset[0,2\pi]$，のときすべての θ に対し $\int_E k_\theta(t)\,dt<\varepsilon$ となる）とする．

証明．必要なこと．$U(\eta_0)=\{f\in N^+;\ \rho(f,0)<\eta_0\}$ は $C_\varphi U(\eta_0)$ が相対コンパクトな近傍とする．$f_r(z)=\frac{\eta_0}{4}\exp\left[\frac{\eta_0}{4}\frac{e^{i\theta}+rz}{e^{i\theta}-rz}\right]$ とおく．$\delta>0$ を $2\delta\log 2<\frac{\eta_0}{4}$ ととり，$r_0>0$ を $|f_r(e^{it})|<\frac{\eta_0}{3}$ if $|t-\theta|\geqq\delta$, $r\geqq r_0$, なようにとる．すると $r_0\leqq r<1$ のとき $f_r\in U(\eta_0)$ で，よって $\{f_r\circ\varphi\}_{r\geqq r_0}$ は N^+ で相対コンパクト．よって $\frac{\eta_0}{4}\exp\left[\frac{\eta_0}{4}\frac{e^{i\theta}+\varphi(z)}{e^{i\theta}-\varphi(z)}\right]=\lim_{r\to 1}f_r(z)\in N^+$．ゆえに

$$\frac{e^{i\theta}+\varphi(z)}{e^{i\theta}-\varphi(z)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu_\theta(t)+i\alpha(\theta)$$

となり，$d\mu_\theta(t) = k_\theta(t)dt + d\nu_\theta(t)$ で，$d\nu_\theta(t) \leqq 0$ は特異測度．しかし $Re\left[\frac{e^{i\theta}+\varphi(z)}{e^{i\theta}-\varphi(z)}\right] \geqq 0$ ゆえ，$d\nu_\theta(t) = 0$．明らかに $k_\theta(t) \geqq 0$．さらに，$\theta_n \to \theta$ のとき $\frac{e^{i\theta_n}+\varphi(z)}{e^{i\theta_n}-\varphi(z)} \to \frac{e^{i\theta}+\varphi(z)}{e^{i\theta}-\varphi(z)}$ だから $\int_0^{2\pi} h(t)\,k_{\theta_n}(t)dt \longrightarrow \int_0^{2\pi} h(t)\,k_\theta(t)\,dt \quad {}^\forall h(\theta)\in C[0,2\pi]$．よって $k_{\theta_n}(t) \to k_\theta(t)$ a.e. でかつ項別積分可能だから一様に可積分である．

十分なこと．$V = \{f\in N^+ ;\ \rho(f,0) < \eta\}$ をとり，$\{f_n\}\subset V$ をとる。容易にわかるように，$\{f_n\}$ はD内で広義一様収束するようにとれる：$F_n(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log^+|f_n(e^{i\theta})|d\theta\right]$ とすると $|F_n(z)| \geqq 1$．$\{F_n\}$ もD内で広義一様収束するようにとっておく．$|\varphi(e^{it})| < 1$ a.e. だから $(F_n\circ\varphi)(e^{it}) \longrightarrow (F\circ\varphi)(e^{it})$ a.e. また $\log^+|f_n(e^{i\theta})|d\theta \longrightarrow d\mu(\theta)$ としておいてよい．$f_n \to f$，$F_n \to F$ とすると $\log(F\circ\varphi)(z) =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+\varphi(z)}{e^{i\theta}-\varphi(z)}d\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\mu(\theta)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}k_\theta(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha\, d\mu.$$

$\{k_\theta(t)\}$ の一様可積分性から $d\tau(t) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} k_\theta(t)\,dt\, d\mu(\theta)$ は dt に関して絶対連続で，よって

$$(F\circ\varphi)(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}g(t)dt + i\beta\right] \quad (\beta = \text{実定数})$$

となり，$g(t) \geqq 0$，$g(t)\in L^1[0,2\pi]$．よって $\{\log|(F_n\circ\varphi)(e^{it})|\}$ は項別積分可能で，$\log^+|(f_n\circ\varphi)(e^{it})| \leqq \log|(F_n\circ\varphi)(e^{it})|$ だから $\{\log^+|(f_n\circ\varphi)(e^{it})|\}$ は一様可積分（n に関して）．それゆえ $\{\log(1+|(f_n\circ\varphi)(e^{it})|)\}$ は項別積分可能で，よって N^+ に

おいて $f_n\circ\varphi \longrightarrow f\circ\varphi$. 証終.

この証明から

系 2.6. $U(\eta)=\{f\in N^+ ; \rho(f,0)<\eta\}$ とおく. ある η_0 に対し $C_\varphi U(\eta_0)$ が相対コンパクトならば, すべての η に対し $C_\varphi U(\eta)$ が相対コンパクトである.

また

系 2.7. $\varphi\in M$ が (2.1) をみたせば, C_φ は N^+ 上で完全連続である.

定理2.4 に関連して, つぎのことが考えられる:

(1) C_φ がある p に対し H^p 上で完全連続ならば, N^+ 上でも完全連続か?

(2) C_φ が N^+ 上で完全連続なら, H^p 上ではどうか.

筆者はこれに答えることができない. (2) は肯定的であろうが (1) は否定的であろうと思う.

3. Schröder の方程式

単位円板 D を $w=f(z)$ によって領域 G に写し, $\varphi\in M$ に対してつぎの図が可換になるとすると, $f\circ\varphi=g\circ f$.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & D \arrow[d, "f"] \\ G \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

とくに $g: G\longrightarrow G$ が1次関数となったとすれば

(3.1) $\quad f(\varphi(z)) = c f(z)$, すなわち $C_\varphi f = cf$.

(3.1) を Schröder の方程式という.

(3.1) の解の存在はよく知られている [4]. $c \neq (\varphi'(0))^k$ for $k = 0, 1, 2, \cdots$ ならば (3.1) の解は trivial なものしか存在しない. 逆に

定理 3.1. C_φ は N^+ 上で完全連続とする. このとき (3.1) の解は N^+ に属し, $f(z) = \lim_{n\to\infty} c^{-n} g \circ \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n}$ で与えられる. ここで $c = (\varphi'(0))^k$ とし, $g(z)$ は $g(0) = \cdots = g^{(k-1)}(0) = 0$, $g^{(k)}(0) \neq 0$ をみたす N^+ の任意の関数である.

(3.1) で $\log f(z) = F(z)$, $\log c = c'$ とおけば, Abel 方程式 $F(\varphi(z)) = F(z) + c'$ となる. 適当な1次変換によって $c' = 1$ とでき, $F^{-1} = \Phi$ とかくと, 差分方程式: $\Phi(w+1) = \varphi(\Phi(w))$ を得る. $1/\Phi(w) = \Psi(w)$, $1/\varphi(\frac{1}{z}) = \psi(z)$ とおけば

$$\Psi(w+1) = \psi(\Psi(w)) = c_1 \Psi(w) + c_0 + \sum c_m (\Psi(w))^{-m} \tag{3.2}$$

ただし $\varphi(0) = 0$, したがって $\psi(z) = c_1 z + c_0 + \sum c_m z^{-m}$ とした. 適当な1次変換によって (3.2) はさらに

$$\Psi(w+1) = \Psi(w) + 1 + \frac{\lambda_1}{\Psi(w)} + \frac{\lambda_2}{\Psi(w)^2} + \cdots \tag{3.3}$$

とできる. とくに $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = 0$ の場合について考えると簡単な差分方程式

$$\Psi(w+1) = \Psi(w) + 1 + \lambda / \Psi(w) \tag{3.4}$$

を得る. これは T. Kimura によって研究された方程式である [2], [3], [7]. この方程式の有理型な解の構造が決定される [8], [9]. 証明には, $N_{\mathscr{E}}$ 集合の若干の性質を用いる.

[1] P.L. Duren, Theory of H^p spaces. Academic Press, 1970.

[2] T. Kimura, On the iteration of analytic functions. Funkc. Ekv., 14 (1971), 197-238.

[3] T. Kimura, On meromorphic solutions of the difference equation $y(x + 1) = y(x) + 1 + \lambda/y(x)$. Lecture Notes in Math., #312, Springer-Verlag, 1973.

[4] E. Picard, Leçons sur Quelques Équations Fonctionelles avec des Applications à divers Problèmes d'Analyse et de Physique Mathématique. Gauthier-Villars, 1928.

[5] J.V. Ryff, Subordinate H^p functions. Duke Math. J. 33 (1966), 347-354.

[6] J.H. Shapiro and P.D. Taylor, Compact, nuclear, and Hilbert-Schmidt Composition operators on H^2. Indiana Univ. Math. J., 23 (1973), 471-496.

[7] K. Takano, On hypertranscendency of solutions of a difference equation of Kimura. Funkc. Ekv., 16 (1973), 241-254.

[8] N. Yanagihara, Meromorphic solutions of the difference equation $y(x + 1) = y(x) + 1 + \lambda/y(x)$, I. Ibid, to appear.

[9] N. Yanagihara, Meromorphic solutions of the difference equation $y(x + 1) = y(x) + 1 + \lambda/y(x)$, II. Ibid, to appear.