数理解析研究所講究録
第323巻 1978年 124-138

Extremal length の応用

東大・養 及川廣太郎

§1. 定義 こゝでは，"曲線"とは，区間 $I=[0,1]$，または $(0,1)$，または $[0,1)$，または $(0,1]$ から，複素平面の中への連続写像のこととする。そのようなものが"局所的に rectifiable"であるとは，I の任意の閉部分区間に制限したものが rectifiable なこととする。

いま，局所的に rectifiable な曲線 C から成る，或る族 Γ が与えられたとする。下半連続（つまり $\forall\zeta$ に対し $\rho(\zeta)\le\varliminf_{z\to\zeta}\rho(z)$ をみたす）非負な関数 ρ に対し

$$L(\Gamma;\rho)=\inf\left\{\int_C\rho|dz| : C\in\Gamma\right\}$$

とおき，このような ρ すべてにわたっての上限

$$\lambda(\Gamma)=\sup\frac{L(\Gamma;\rho)^2}{\iint\rho^2dxdy},\quad ただし\ \frac{0}{0}=\frac{\infty}{\infty}=0,$$

のことを曲線族 Γ の extremal length，また $m(\Gamma)=1/\lambda(\Gamma)$ のことを Γ の module という。

Ahlfors - Beurling [1] によって導入された概念である。

いま $\mathbb{P}(\Gamma) = \{\rho : \geq 0,$ 下半連続, $L(\Gamma;\rho) \geq 1\}$ とおくとき

$$\lambda(\Gamma) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathbb{P} = \phi \\ \left(\inf\{\iint \rho^2 dx dy : \rho \in \mathbb{P}(\Gamma)\right)^{-1} & \text{if } \mathbb{P} \neq \phi \end{cases}$$

が成り立つことがすぐわかる。$\mathbb{P} \neq \phi$ で，しかも $\lambda > 0$ のとき，この "$\inf$" を実現する ρ は，あれば唯一つに決まることが知られており，そのような ρ を <u>extremal metric</u> という．必ずしも存在するとは限らない。$\mathbb{P}(\Gamma)$ の L^2 での閉包の中になら，つねに，しかも唯一つ存在することがいえる。これを <u>generalized extremal metric</u> という．(これについては，例えば，文献 [16] の Appendix を参照．).

Extremal length の応用に際しては，下記の五つの性質，およびそれらの適当な変形・拡張，が現在までのところ，基本である：

(I) 等角写像で不変である；

また，矩形の両縦辺をつなぐ曲線のすべてから成る Γ について，

(II) $\lambda(\Gamma) =$ (矩形の横長)/(矩形の高さ)

(III) Extremal metric は $\rho(z) = \mathrm{const}$

(IV) 矩形の両横辺をつなぐ曲線すべてから成る Γ^* について $\lambda(\Gamma^*) = 1/\lambda(\Gamma)$

(V) 有限個の水平截線が入っても影響ない.

そして, これらのことが種々の形に拡張されて論じられているのである; [7], [11], [23] などはほんの例にすぎない.

Extremal length に関連した量として, 次のものも重要である。領域 Ω と, その閉包に含まれる集合 E_1, E_2 を与えたとき, Ω 内で E_1 と E_2 を結ぶ曲線全体から成る族の extremal length を, Ω に関する E_1 と E_2 の <u>extremal distance</u> という. 以下, $\lambda_\Omega(E_1, E_2)$ とあらわすことにする。

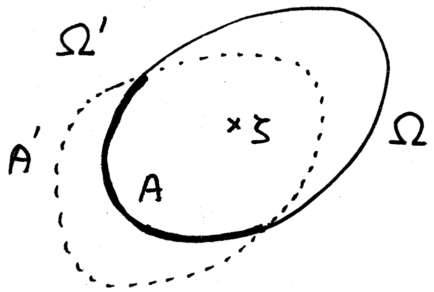
<u>調和測度との関係</u>は, Ahlfors が 1947 年春に Harvard の講義で述べたとのことであるが, 文献にあらわれるのは Hersch の学位論文 (1955) である (大津賀 [7] も参照). いま Ω を双曲型の単連結領域とし, 点 $\zeta \in \Omega$ および $\partial\Omega$ 上の弧 (意味は明瞭であろう) を与えたとき, $u(\zeta) = u(\zeta; A, \Omega)$ は A で 1, $\partial\Omega - A$ で 0 となる調和測度 u の ζ における値とする。一方, A に始点・終点をもち ζ を $\partial\Omega - A$ から分離する Ω 内の曲線全体 Γ の extremal

length は

$$\lambda(\Gamma) = \frac{2}{\pi}\Psi\left(\left(\tan\frac{\pi}{2}\cdot u(\zeta; A, \Omega)\right)^2\right)$$

であることが計算の結果わかる。こゝに Ψ は Teichmüller の極値領域の module をあらわす関数である。この結果，とくに，対応 $u \longmapsto 1/\lambda$ は $(0,1) \longrightarrow (0,\infty)$ の単調増加関数であることがわかる。

たとえば，右図の，実線であらわされた Ω, ζ, A と，点線の領域 Ω'，はみ出した部分 A' とに関して



$$u(\zeta; A, \Omega) \geq u(\zeta; A', \Omega')$$

が成り立つことはよく知られているが，これは上記の関係から λ を用いて"別証明"することができる。それのみならず，実用に際しては λ を用いた方がしらべ易いことがある（すなわち，調和関数の境界値をしらべるより，次§の性質 (1) を用いた方が簡単な場合がある）。

（問 1）Ω の単連結性を仮定から除いたとき，どのようなことになるであろうか。

§2. 性質 以下に列挙するもののうち(1)−(4)は著名であり，多くの本に含まれている．[16] の Appendix にも，(1)−(4)と(6),(7)の証がある．

(1) Γ, Γ' において，もし $\forall c \in \Gamma$ に対して $c \supset \exists c' \in \Gamma'$ なら（たとえば $\Gamma \subset \Gamma'$ なら），

$$\lambda(\Gamma) \geq \lambda(\Gamma').$$

(2) $\Gamma \subset \bigcup_n \Gamma_n$ なら

$$\frac{1}{\lambda(\Gamma)} \leq \sum_n \frac{1}{\lambda(\Gamma_n)}$$

（これは Hersch (1955) による．それ以前に Strebel [17] は $1/\sqrt{\lambda(\Gamma)} \leq \sum_n 1/\sqrt{\lambda(\Gamma_n)}$ を得た．）

(3) $\Gamma \supset \bigcup_n \Gamma_n$ であり，さらに，互に素な Borel 集合 B_n があって，$\forall c_n \in \Gamma_n$ は B_n に含まれるなら，

$$\frac{1}{\lambda(\Gamma)} \geq \sum_n \frac{1}{\lambda(\Gamma_n)}.$$

(4) Γ, Γ_n において，$\forall c \in \Gamma$ に対し $c_1 + c_2 + \cdots \subset c$ をみたす $c_n \in \Gamma_n$ があり，さらに，互に素な Borel 集合 B_n で $\forall c_n \in \Gamma_n$ は B_n に含まれるならば

$$\lambda(\Gamma) \geq \sum_n \lambda(\Gamma_n).$$

(5)（吹田 [10] による）Γ, Γ_n において、$^\forall c_n \in \Gamma_n$ $(n=1,2,\ldots)$ に対して $c_1+c_2+\cdots \supset {}^\exists c \in \Gamma$ ならば

$$\sqrt{\lambda(\Gamma)} \leq \sum_n \sqrt{\lambda(\Gamma_n)}.$$

（より一般に、$k_n \in \mathbb{Z}$ あり、$^\forall c_n \in \Gamma_n$ に対して $k_1 c_1 + k_2 c_2 + \cdots \supset {}^\exists c \in \Gamma$ なら $\sqrt{\lambda(\Gamma)} \leq \sum_n |k_n| \sqrt{\lambda(\Gamma_n)}$.）

(6) Γ は上半平面の曲線 c で、少くも一方の端点が実軸の上にあるものから成る、ある族とし、c の実軸に関するダブル（開曲線又は閉曲線）の全体を $\hat{\Gamma}$ とすると、

$$\lambda(\hat{\Gamma}) = 2\lambda(\Gamma).$$

(7) Extremal distance $\lambda_\Omega(E_1, E_2)$ について、もし Ω が上半平面に含まれ、しかも $\partial\Omega$ が実軸上の開区間を含むとき、実軸に関するダブル ^ について

$$\lambda_\Omega(E_1, E_2) = 2\lambda_{\hat{\Omega}}(\hat{E}_1, \hat{E}_2).$$

（以上 (6) と (7) は、実軸以外の直線・円弧に関する反転に関しても成り立つ）

(8)（吹田 [10] による）Ω と E_1, E_2, E_3 を考えたとき、extremal distance に関する三角不等式は成立しないが、

$$\lambda_\Omega(E_1, E_2) < \infty, \quad \lambda_\Omega(E_2, E_3) < \infty$$

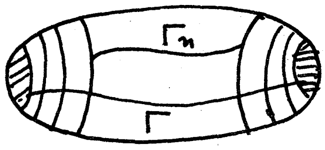
ならば $\lambda_\Omega(E_1, E_3) < \infty$.

(9)（吹田 [19], Ziemer [26] による）.

$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \cdots$, $\Gamma = \bigcup_n \Gamma_n$ なら

$$\lambda(\Gamma) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\Gamma_n).$$

(10) 右図のような場合，適当な条件の下に



$$\lambda(\Gamma) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\Gamma_n)$$

が成り立つというもので，exhaustion の場合は Strebel [18], Marden-Rodin [12] による。一般の場合は Wolontis の学位論文にあるが不完全である。吹田 [21] は，かなり弱い条件の下に証明している。くわしくは，これらの原論文をみて頂きたい。

§3. 応用. きわめて多岐に亘るので，すべてを扱うわけにはいかない。以下は，筆者の経験したものからの話題である。

(1) 単連結領域の写像半径を extremal length によってあらわすことができ，この際 extremal metric は Riemann 写像関数と密接な関係がある。このことは，1930 年代の Teichmüller の仕事にまでさかのぼること

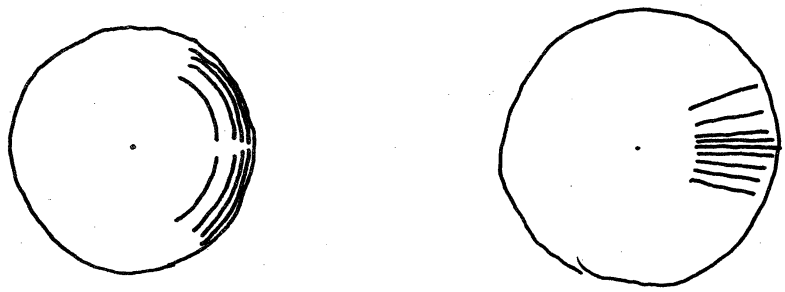
ができる。その後，これらのことは，一般の連結度の領域やRiemann 面に，種々の方向に大幅に拡張されて論ぜられている。また"写像半径が∞"ということを一般化したものが，種々の"null class"であるが，その一部は extremal length を用いて議論できる。[7]，[23]，[16]などは一例である。つぎのものは，未解決の問題である：

（問題2） 平面領域 Ω の境界成分 γ に着目する。$\overline{\Delta} \subset \Omega$ であるような円板 Δ をとって extremal distance $\lambda_\Omega(\Delta, \gamma)$ を考える。このとき，もし $\lambda_\Omega(\Delta, \gamma) = \infty$ ならば，Ω を適当な等角写像で γ が1点に対応するようにすることができるか？ （[16]の342頁の#2）.

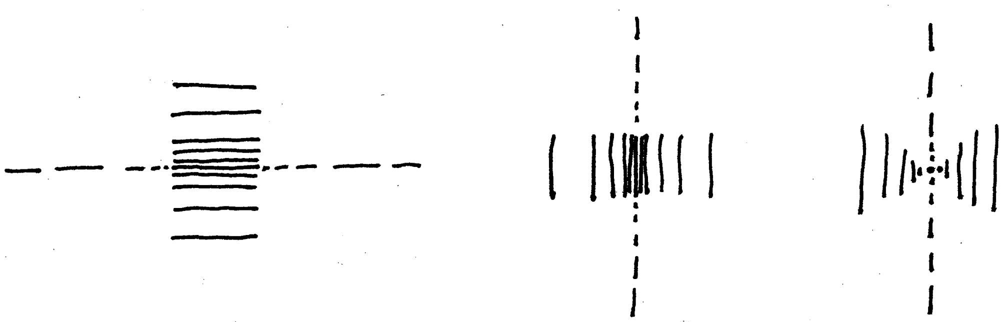
(2) 等角写像の境界対応。単連結領域の場合，prime end などに関する Carathéodory の理論を extremal length を利用して論ずることができる。Ahlfors や，Schlesinger のしごとがあり，例えば[7]，[23]などに出ている。これらのことを一般の領域で議論することも，少しできる（[10]，[22]など）。けれども，一般の領域の境界対応は未だにわからないことが多い。例えば，下記の2つの問題は，あるいは extremal length を用いてしらべることができるかもしれない（できないかもしれな

いが）ものである。

（問題３） 下左図のような、無限個の円弧截線の入った円板を、放射截線入りの円板に等角写像しようとすると、できる場合と、下右図のように切り込み（incision）が生じる場合とがある（[16], p.166）。円弧截線がどのような条件をみたすと、切り込みが生じるか、判定条件を与えよ。



（問題４）下左図のような、実軸と虚軸に関して対称な水平截線領域を垂直截線領域に等角写像する。像領域は、下中図のように中央の線分が線分に対応するときと、下右図のように点に対応するときと、双方ありうるが、どのような条件のとき、どちらになるか、判定条件を与えよ（下中図の場合の例は、[10′]の9°に与えられている）。



(3) 等角写像の境界における等角性は次のように定式化して論ずる．$z=x+iy$ 平面の帯状領域 $\{z \mid |y|<\frac{\pi}{2}\}$ を記号 S であらわし，D は $w=u+iv$ 平面の双曲型単連結領域で，$\forall\varepsilon>0$ に対し $\{w \mid a<u,\ |v|<\frac{\pi}{2}-\varepsilon\}\subset D$ をみたす a が存在するようなものとする．S から D の上への等角写像 $w=f(z)=u(z)+iv(z)$ で，$z=+\infty$ を $w=+\infty$ に対応させるものについて，有限な極限値

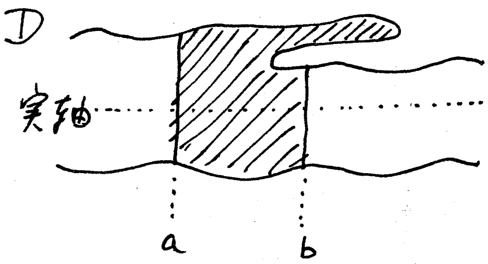
(i) $\lim\,(y-v(z))$，　(ii) $\lim\,(z-f(z))$，

ただし $z=x+iy$ は $|y|<\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ で $x\to+\infty$ とする，の存在を論ずる．

このうち，(i) については，Painlevé (1891)，Lichtenstein (1911) を経て Carathéodory (1914) によって扱われる．Carathéodory の結果は，今日，調和測度の知識からみれば，殆ど自明といってよい（例えば，小松勇作氏の，等角写像論，(上)，p.384 をみられたい）．Ostrowski (1937) はつぎの結果を与えた：上記の (i) の有限な極限値が存在するための必要十分条件は，$\forall\varepsilon>0$ に対し，$\{w \mid |w-(b+\frac{i\pi}{2})|<\varepsilon\}\not\subset D$，$\{w \mid |w-(b-\frac{i\pi}{2})|<\varepsilon\}\not\subset D$ が $\forall b>a$ で成り立つような a が存在することである．この証明は，もとのものは極めて複雑であるが，調和測度と extremal length

の関係(§1)を用いると比較的簡単に証明することができる([4])．

つぎに(ii)は，Carathéodory (1929), Wolff (1926), Ahlfors (1930)で扱われて来たが，有限な極限値の存在するための必要十分条件をつぎのように与えることができる([4])：十分大きい任意の $a<b$ に対し，図のようにDの2つのcross-cutsをとり，それらではさまれた部分(図の斜線の部分)に関する両cross-cutsのextremal-distanceを $\lambda(a,b)$ とおくとき，問題の必要十分条件は



$$\lambda(a,b)=\frac{b-a}{\pi}+o(1),\qquad b>a\to\infty$$

が成り立つことである。

この条件から，今まで知られている種々の必要条件や十分条件を導くことができるであろうか？ たとえば[2]，[25]で与えられている条件(WarschawskiとEkeによる)などは，ひとつのテスト・ケースであろう。

なお，(ii)の極限値は角微係数とよばれており，微係数の一種の一般化なのであるが，Warschawski [24]は，高次微係数に相当するものを考えている。このようなもの

も extremal length を利用して論ずることができるのであろうか？

(4) Problem of conformal pasting ([8], [9]). 本質的な部分は，つぎのような単純な場合を考えただけで十分である。 $y = f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で定義された狭義単調増加な連続関数で，$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$（複号同順）とする。帯状領域 $S = \{x + iy \mid 0 < y < 1\}$ を考える。いま $\overline{S}$ において

点 x と点 $f(x) + i$ を identify する

ならば，位相的には2重連結領域と同位相な面 X が得られるが，これに解析構造を入れてリーマン面とし，その際 S の複素平面 $\mathbb{C}$ の部分領域としての解析構造を保つ（つまり S から X への自然な射影が正則写像となるようにする）ことは，常にできるとは限らない。もしできるなら f は解析的な接合を許すということにする。

この問題には，擬等角写像の境界対応を利用して，解析的な接合を許すための十分条件を与えることができる。Lehto [6] はこれを拡張してつぎのような十分条件を与えた：$-\infty < x < \infty$ なる $^{\forall}x$ に対して

(*)
$$\rho(t) = \begin{cases} O(\log \frac{1}{t}) & t \to 0 \\ O(\log t) & t \to \infty \end{cases}$$

をみたす実関数 $\rho(t)$ が存在して,

$$\frac{1}{\rho(t)} \leq \frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)} \leq \rho(t)$$

が $\forall x$, $\forall t$ で成り立てば, f は解析的な接合を許す. なお, 条件 $(*)$ をゆるめて, $\log t$ の代りに $\log t \cdot \log\log t$ や, もっと沢山 iterate したものも同様な十分条件を与える.

一方, extremal length を利用することによってつぎのような例を得ることがわかるのである ([8]):

$$f_1(x) = \begin{cases} x^\alpha & x \geq 0, \quad \alpha > 1 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$$

は解析的接合を許さない;

$$f_2(x) = \begin{cases} x/\exp(\log \frac{1}{x})^\gamma, & x > 0, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2} \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$$

は解析的接合を許す.

(問5) Lehto の条件において, $(*)$ は $t \to 0$ に対し $\rho(t) = O(\exp(\log 1/t)^\gamma)$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, $t \to \infty$ に対してもこれに準ずるもの, にまでゆるめ得ないであろうか?

なお $\frac{1}{2} \leq \gamma$ に対しては, くわしいことはわかっていな

いが、γを大きくとるとf_1に似て来て、解析的接合を許さなくなるようである。

文　献

[1] Ahlfors, L. V. and Beurling, A. Conformal invariants and function-theoretic null-sets. Acta Math. 83 (1950), 101-129.

[2] Eke, B. G. Comparison domains for the problem of the angular derivative. Comment. Math. Helv. 46 (1971), 98-112.

[3] Jenkins, J. A. and Oikawa, K. On results of Ahlfors and Hayman. Ill. J. Math. 15 (1971), 664-671.

[4] -------- Conformality and semi-conformality at the boundary. J. r. u. a. Math. 291 (1977), 92-117.

[5] -------- On Ahlfors' second fundamental inequality. Proc. A. M. S. 62 (1977), 266-270.

[6] Lehto, O. Homeomorphisms with a given dilatation. Proc. 15th Scand. Congr. 1968. Springer Lec. Note. 118.

[7] Ohtsuka, M. Dirichlet problem, extremal length, and prime ends. Van Nostrand, 1970.

[8] Oikawa, K. Welding of polygons and the type of Riemann surfaces. Kōdai Math. Sem. Rep. 13 (1961), 37-52.

[9] ----- A remark to the construction of Riemann surfaces by welding. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 27 (1963), 213-216.

[10] Oikawa, K. and Suita N. On conformal mappings onto incised radial slit disks. Kōdai Math. Sem. Rep. 22 (1970), 45-52.

[10'] -------- On parallel slit mappings. Ibid. 16 (1964), 249-254.

[11] Rodin, B. The method of extremal length. Bull. A.M.S. 80 (1974), 589-606.

[12] Marden, A. and Rodin, B. Extremal and conjugate extremal distance on open Riemann surfaces with applications to

circular-radial slit mappings. Acta Math. 115 (1966), 237-269.

[13] Rodin, B. and Warschawski, S. E. Extremal length and the boundary behavior of conformal mappings. Ann. Acad. Sci. Fenn. A-I, 2 (1976), 469-500.

[14] -------- Extremal length and univalent functions. I. The angular derivative. Math. Z. 153 (1977), 1-17.

[15] -------- Extremal length and univalent functions. II. Integral estimates of strip mappings. To appear in J. Math. Soc. Japan.

[16] Sario, L. and Oikawa, K. Capacity functions. Springer-Verlag, 1969.

[17] Strebel, K. Eine Ungleichung für extremale Längen. Ann. Acad. Sci. Fenn. A-I 90 (1951), 8 pp.

[18] ------ Die extremale Distanz zweier Enden einer Riemannschen Fläche. Ibid. 179 (1955), 22pp.

[19] Suita, N. On a continuity lemma of extremal length and its applications to conformal mapping. Kōdai Math. Sem. Rep. 19 (1967), 129-137.

[20] ------ On slit rectangle mappings and continuity of extremal length. Ibid. 425-438.

[21] ------ On continuity of extremal distance and its applications to conformal mappings. Ibid. 21 (1969), 236-251.

[22] ------ Carathéodory's theorem on boundary elements of an arbitrary plane region. Ibid. 413-417.

[23] ------ Kindai Kansuron II. 1977, Morikita. In Japanese.

[24] Warschawski, S. E. On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping. Trans. Amer. Math. Soc. 51 (1935), 310-340.

[25] ------ Remarks on the angular derivative. Nagoya Math. J. 41 (1971), 19-32.

[26] Ziemer, W. Extremal length and conformal capacity. Trans. A. M. S. 126 (1967), 460-473.