数理解析研究所講究録
第 323 巻 1978 年 139-153

Conformal metrics

東工大理
吹田信之

1．まえがき．Sario－Oikawa はその著書 " Capacity functions において つぎの問題を提起した；$c_\beta(z)$ を有り一二ヽ個 Ω の境界の容量，$K(z,\bar{\zeta})$ を Ω の Bergman 核とするとき，$c_\beta^2(z)$ と $\pi K(z,\bar{z})$ の大小を比較せよ［5］．

この問題はのちに示す c_β と K との関係式

$$K(z,\bar{z})=\frac{1}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\log c_\beta(z)$$

により，計量 $ds_\beta = c_\beta|dz|$ の曲率

$$K(ds_\beta)= -\Delta\log c_\beta(z)/c_\beta^2(z)$$

の評価の問題に帰着させられる．著者は二重連結領域について $c_\beta^2(z)\leqq\pi K(z,\bar{z})$ を示し，一般領域についても同じ不等式を予想した［6］．この予想は上のことから，$K(ds_\beta)\leqq -4$ と同値である．支持計量を利用することにより，Ω が n 個（$n>2$）の曲線によりかこまれた領域ならば $K(ds_\beta)<-4$ をみたす点 $z\in\Omega$ は存在する。

他の等角計量についても同様な予想がある。$C_B(z)$を解析容量とし，$ds_B = C_B(z)|dz|$とするとき$K(ds_B) \leqq -4$. この予想は等号条件を除いて著者により解かれた[7,8]. さらに，リーマン面Ω上で正則かつDirichlet積分

$$\iint_\Omega |f'(z)|^2 dx\,dy$$

がπで押えられる函数族$\mathfrak{D}$について

$$C_D(z) = \sup_{f\in\mathfrak{D}} |f'(z)|$$

とおく。酒井氏の結果[4]を使えば，$ds_D = C_D(z)|dz|$について，$C_D(z) > 0$ならば$K(ds_D) \leqq -2$が示される。この場合も予想は$K(ds_D) \leqq -4$であり，二重連結のの場合は正しい[11]. 酒井氏は最近この予想に肯定的な解答を得たとのことである[1)]

Ωを平面領域とし，$\mathfrak{D}$の部分族で単葉な函数族を$S\mathfrak{D}$とかく．

$$C_{SD}(z) = \sup_{f\in S\mathfrak{D}} |f'(z)|,$$

$ds_{SD} = C_{SD}(z)|dz|$とおけば，$C_{SD}(z) > 0$かつ微分可能な場合に$K(ds_{SD}) \leqq -4$が示される[7].

リーマン面Ω上のBergman核は計量$ds_K = \sqrt{\pi K(z,\bar{z})}|dz|$

1) 私信

をみちびく．ds_K の曲率については，-4 より大きい点も小さい点も存在することを円環の場合で示す。

2．基本等式　容量 c_β と K との関係式(1)は［6］で証明されている，ここではより簡単な別証を示す

定理1．Ω が O_G に属しないリーマン面ならば

$$(1)\qquad K(z,\bar{z}) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\log c_\beta(z)$$

証明

$$H(z,\zeta) = g(z,\zeta) + \log|z-\zeta|$$

とおく．ここに $g(z,\zeta)$ は Ω のグリーン函数，局所助変数 z，ζ を点の表示に用いた．対称性から $H(z,\zeta) = H(\zeta,z)$

さらに

$$H(z,z) = \log\frac{1}{c_\beta(z)}.$$

$H(w,\omega)$ は対称な調和函数なので $w=z$，$\omega=\zeta$ のまわりでつぎのように展開される

$$H(w,\omega) = a_{00} + \cdots + a_{20}(w-z)^2$$

$$+ a_{20}\overline{(w-z)}^2 + a_{02}(\omega-\zeta)^2 + a_{02}\overline{(\omega-\zeta)}^2$$

$$+ a_{11}(w-z)(\omega-\zeta) + a_{\bar{1}\bar{1}}\overline{(w-z)}\,\overline{(\omega-\zeta)}$$

$$+ a_{1\bar{1}}(w-z)\overline{(\omega-\zeta)} + a_{\bar{1}1}\overline{(w-z)}(\omega-\zeta) + \cdots$$

ここで a_{00} は実数であり，$a_{jk} = \overline{a_{\bar{j}\bar{k}}}$，$a_{j\bar{k}} = \overline{a_{\bar{j}k}}$，⋯

明らかに

$$\left.\frac{\partial^2 H(w,\omega)}{\partial w\,\partial\bar{\omega}}\right|_{w=z,\ \omega=\zeta} = a_{1\bar{1}} = a_{1\bar{1}}(z,\zeta)$$

$$\left.\frac{\partial^2 H(w,\bar{w})}{\partial w\,\partial\bar{w}}\right|_{w=z} = a_{1\bar{1}} + a_{\bar{1}1}.$$

よく知られた等式［2］

$$K(w,\bar{w}) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial\bar{\omega}}\,g(w,\omega)$$

と，$K(z,\bar{z}) = -2a_{1\bar{1}}(z,z)/\pi \geq 0$ に注意すれば，求める関係式が得られる。

3．$K(ds_B) \leq -4$．$\Omega \notin O_{AB}$ とする．解析容量 $C_B(\zeta)$ は

$$C_B(\zeta) = \sup_{|f(z)|\leq 1} |f'(\zeta)|$$

で定義される．$f_0'(\zeta,\zeta) = C_B(\zeta)$ をみたす $f_0(z,\zeta)$ はつね

に存在し，Ahlfors 函数とよばれる．

定理２［７］．$c_B(z)>0$ かつ $c_B(z)$ が２回連続微分可能ならば $K(ds_B)\leqq -4$．とくに Ω が平面領域かつ $\notin O_{AB}$ ならば，$c_B(z)$ は実解析的であり，つねに $c_B(z)>0$．

証明．支持計量の方法を用いる．Ahlfors 函数 $f_0(\zeta, z)$ をとり

$$F(\zeta; t) = \frac{f_0(\zeta, z) - f_0(t, z)}{1 - \overline{f_0(t, z)}\, f_0(\zeta, z)}$$

とおく．$|F(\zeta, t)| \leqq 1$ である．

$$|F'(t, t)| = \frac{|f_0'(t, z)|}{1 - |f_0(t, z)|^2} = c(t)$$

点 z の近傍で，$c_B(t) \geqq c(t)$ であり，$c_B(z) = c(z)$

したがって $\log(c_B(t)/c(t))$ は $t = z$ で極小値をとる．

これから $t = z$ において

$$-\Delta \log c_B(z) \leqq -\Delta \log c(z)$$

計算により $\Delta \log c(z)/c(z)^2 = 4$ だから，$K(ds_B) \leqq -4$．

平面領域における $c_B(z)$ の実解析性は，$c_B(z)$ とセゲー核 $k(z, \bar{z})$ との関係 $c_B(z) = 2\pi k(z, \bar{z})$［２］から容易に示される．実際 Ω が n 個の解析曲線にかこまれた平面領域ならば，$\bar{\Omega}$ 上で正則な直交函数系 $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ をとることにより

ができて，

$$k(z,\zeta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\zeta)}$$

と展開される．収束はΩの境界上のノルム

$$\|\varphi\|^2=\int_{\partial\Omega}|\varphi|^2|dz|$$

に関して強収束であり，さらにΩ上広義一様である．これから $k(z,\bar{z})$ の実解析性は明らかである．一般領域の場合は，Ωの近似 $\{\Omega_\nu\}$ を考え，対応する核函数 $k_\nu(z,\zeta)$ が $\Omega\times\Omega$ 上で広義一様収束することから，実解析性が証明される．

注意．$c_B(z)$ の実解析性は，開リーマン面の場合は一般には成立しない．これは山田[10]により反例が得られている。

等号条件は異なる方法によって完全ではないが，かなりのところまで求められている[3,8]．これを示そう．

定理3．Ωは平面領域とする．ζにおけるAhlfors函数 $f_0(z,\zeta)$ が，ζ以外に零点を持てば，ζの点で $K(ds_B)<-4$．

証明．まずΩが有限個の解析曲線でかこまれているとき，つぎの二つの極値問題を考える．

I. $f(\zeta)=1$ のとき $\|f\|^2 = \int_{\partial\Omega} |f|^2 |dz|$ を最小にする.

II. $f(\zeta)=0$, $f'(\zeta)=1$ のとき $\|f\|^2$ を最小にする.

問題Iの極値函数は $k(z,\bar{\zeta})/k(\zeta,\bar{\zeta})$ であって，最小値 $\lambda_0(\zeta) = k(\zeta,\bar{\zeta})^{-1}$

問題IIの極値函数 $F_1(z)$ は

$$F_1(z) = - \begin{vmatrix} 0 & k(z,\bar{\zeta}) & k_{\bar{\zeta}}(z,\zeta) \\ 0 & k_{00} & k_{01} \\ 1 & k_{10} & k_{11} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} k_{00} & k_{01} \\ k_{10} & k_{11} \end{vmatrix}$$

で与えられ，その最小値は，$\lambda_1(\zeta) = k_{00}/(k_{00}k_{11} - |k_{10}|^2)$ となる。ここで $k_{\alpha\beta} = (\partial^{\alpha+\beta}/\partial\zeta^\alpha \partial\bar{\zeta}^\beta)\, k(\zeta,\bar{\zeta})$．さらに曲率とこれ等極値との関係は

$$(3) \quad K(ds_B) = - \frac{\lambda_0(\zeta)^3}{\pi^2 \lambda_1(\zeta)}$$

で与えられる．これ等の結果は Bergman が Bergman 核に関して導いた公式の類似物である [2]．$K(ds_B) \leqq -4$ は(3)からも示される．$\varphi(z) = f_0(z,\zeta)\, k(z,\bar{\zeta})/2\pi k_{00}^2$ は問題IIの条件をみたしている．$\|\varphi\|^2 = (4\pi^2 k_{00}^3)^{-1} \geqq \lambda_1(\zeta)$ だから，$K(ds_B) \leqq -(\pi^2 \|\varphi\|^2 k_{00}^3)^{-1} = -4$.

等号条件をしらべるため，$f_0(z,\zeta)$ は ζ 以外の零点 ζ_0 をも

つものとする．$k(z,\zeta)$ の共役核を $l(z,\zeta)$ とかく．$l(z,\zeta)$ は $z=\zeta$ に留数 1 の極を持ち，z, ζ に関して対称，かつ境界に沿って

$$(4) \qquad l(z,\zeta)|dz| = i\overline{k(z,\zeta)dz}$$

が成立する．さらに $l(z,\zeta)$ は Ω 内に零点をもたないことが知られている [2]

さて，

$$h(z) = (z-\zeta)\,l(z,\zeta_0)f_0(z,\zeta)$$

とおく．$h(z)$ と $\varphi(z)$ の内積を計算する．(4) を使って，

$$(h,\varphi) = \int_{\partial\Omega} h\,\overline{\frac{f_0(z,\zeta)\,k(z,\zeta)}{2\pi\, k_{00}^2}}\,|dz|$$

$$= \frac{1}{2\pi k_{00}^2 i}\int_{\partial\Omega}(z-\zeta)\,l(z,\zeta_0)\,l(z,\zeta)\,dz = \frac{(\zeta-\zeta_0)}{i\,k_{00}^2}\,l(\zeta_0,\zeta).$$

$\varphi_\varepsilon(z) = \varphi(z) + \varepsilon h(z)$ は問題 II の条件をみたしている．

$\|\varphi_\varepsilon\|^2$ の最小値は，$\varepsilon = -|(h,\varphi)|\,\|h\|^{-2}\exp(-i\arg(h,\varphi))$ のときとられ，その値は

$$\|\varphi\|^2 - \frac{|(h,\varphi)|^2}{\|h\|^2}$$

に等しい．このことは $K(ds_B) < -4$ を示す．

Ωが平面一般領域の場合，$\infty \in \Omega$としても一般性を失わない．Ωの近似を$\{\Omega_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$とし，各$\Omega_\nu$におけるAhlfors函数を$f_\nu(z,\zeta)$とかく．$f_\nu \to f_0$（広義一様）だから$f_0(z,\zeta)$の零点$\zeta_0$は，$f_\nu(z,\zeta)$の零点$\zeta_\nu$の集積値である．補助の等角写像を利用すればよいから$\zeta \neq \infty$と仮定する．Ω_νにおけるφ，hに対応する函数をφ_ν，h_νとかく．Ω_νにおけるセゲーおよび共役核を$k^{(\nu)}(z,\zeta)$，$l^{(\nu)}(z,\zeta)$として，$\nu \to \infty$のとき

$$\left|(h_\nu, \varphi_\nu)\right| = \left|\frac{(\zeta-\zeta_\nu)}{k_{00}^{(\nu)2}}\, l^{(\nu)}(\zeta_\nu,\zeta)\right| \to \left|\frac{\zeta-\zeta_0}{k_{00}^{2}}\, l(\zeta_0,\zeta)\right|$$

だから$|(h_\nu,\varphi_\nu)|$は正の下限を有する．さらに，(4)より

$$\|h_\nu\|^2 = \int_{\partial\Omega_\nu} |z-\zeta|^2 |l^{(\nu)}(z,\zeta_\nu)|^2 |dz|$$

$$= \int_{\partial\Omega_\nu} |z-\zeta|^2 |k^{(\nu)}(z,\zeta_\nu)|^2 |dz|$$

$z \in \Omega_\nu$のとき，$|z-\zeta| \leqq M$としてよいから，再生性より

$$\|h_\nu\|^2 \leqq M^2 k^{(\nu)}(\zeta_\nu,\zeta_\nu) \to M^2 k(\zeta_0,\zeta_0) \quad (\nu\to\infty)$$

$\|h_\nu\|^2$が一様有界だから$|(h_\nu,\varphi_\nu)|/\|h_\nu\|^2$も正の下限を持つ．このことから$\zeta$において$K(ds_B) < -4$．

4．その他の等角計量．$\Omega \notin O_{AD}$とする．$\mathcal{D} = \{f\}$

$\iint |f'|^2 dxdy \leqq \pi$ について，$\sup |f'(\zeta)|$，$f \in \mathcal{D}$ を $C_D(\zeta)$ とおく．$g'(\zeta) = C_D(\zeta)$ をみたす g が $\mathcal{D}$ 内に存在する．$C_D(\zeta) > 0$ ならば $g(z)$ は附加定数を除いて唯一つ定まる．とくに $g(\zeta) = 0$ をみたす函数を AD 極値函数とよび $f_1(z, \zeta)$ とかく．酒井氏によればつねに $|f_1(z,\zeta)| \leqq 1$ [4]．$ds_D = C_D(z)|dz|$ とて，この結果をつかえば，

定理4．$\Omega \notin O_{AD}$，$C_D(z) > 0$ ならば，$K(ds_D) \leqq -2$．

証明，Ω 上の exact な微分のつくる Hilbert 空間の Bergman 核を $K(z, \bar\zeta)$ とかく．f_1 は

$$f_1(z,\zeta) = \int_\zeta^z \frac{\sqrt{\pi}\; K(z,\bar\zeta)}{\sqrt{K(\zeta,\bar\zeta)}}\, dz$$

で与えられる [1]．$C_D(\zeta) = \sqrt{\pi K(\zeta,\bar\zeta)}$．$K(\zeta,\bar\zeta)$ は直交函数による展開を持つから，$K(\zeta,\bar\zeta)$ は実解析的である

この場合は　定理3′の証明でものべた Bergman の方法 [2] を使うことができる．

問題I′　$f'(\zeta) = 1$ のとき $\iint_\Omega |f'|^2 dxdy = \|f'\|^2$ を最小にする．最小値を $\lambda_0^*(\zeta)$ とおく

問題II′　$f'(\zeta) = 0$，$f''(\zeta) = 1$ のとき $\|f'\|^2$ を最小にする．最小値を $\lambda_1^*(\zeta)$ とおく．

$$(5)\quad K(ds_D) = -\frac{2}{\pi}\frac{\lambda_0^*(\zeta)^2}{\lambda_1^*(\zeta)}.$$

問題I′の極値函数は

$$F_0(z) = \int_\zeta^z \frac{K(z,\bar{\zeta})}{K(\zeta,\bar{\zeta})}\,dz$$

で与えられ，$\lambda_0^*(\zeta) = K(\zeta,\bar{\zeta})^{-1}$．問題II′の条件をみたす函数として，

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}F_0(z)^2$$

をとる．　$F_0 = f_1(z,\zeta)/\sqrt{\pi K(\zeta,\bar{\zeta})}$, $|f_1| \leqq 1$だから，

$$|\varphi'| \leqq \left|\frac{f_1'(z,\zeta)}{\pi K(\zeta,\bar{\zeta})}\right|$$

すなわち

$$\lambda_1^*(\zeta) \leqq \|\varphi'\|^2 \leqq \left(\pi K(\zeta,\bar{\zeta})^2\right)^{-1}$$

(5) より　$K(ds_D) \leqq -2$ をうる．

Ωを平面領域とし，$ds_{SD} = c_{SD}(z)|dz|$ を考える．Ω内で単葉正則かつ$|f(z)| \leqq 1$をみたす函数族をSBとかき，$c_{SB}(\zeta) = \sup|f'(\zeta)|$，$f \in SB$ とおく．$c_{SD}(\zeta) = c_{SB}(\zeta)$となることが知られている[1]．したがって，$c_{SD}(z)$が2回微分可能な点では定理2の証明がそのまま使うことができて，$K(ds_{SD}) \leqq -4$となる．しかし，複連

結領域の場合は $C_{SD}(z)$ は必らずしも微分可能ではない．例として円環 $\Delta: R^{-1}<|z|<R$ $(R>1)$ をとる．$R^{-1}<x<R$ とする．$C_{SD}(x)$ を与える極値函数 $p(z)$ は $p(x)=0$ をみたし，Δ を半径1の円周截線円板へ写像する．$p(z)$ は Δ のグリーン函数 $g(z,x)$ を用いてつぎのように表わされる．

$$\log|p(z)| = -g(z,x) - \begin{cases} \dfrac{\log Rx \log R|z|}{2\log R} & (R^{-1}<x\leq 1) \\[2ex] \dfrac{\log(x/R)\log |z|/R}{2\log R} & (1\leq x<R) \end{cases}$$

これから

$$(6)\qquad \log C_{SD}(x) = \log C_{\beta}(x) - \begin{cases} \dfrac{(\log Rx)^2}{2\log R} & (R^{-1}<x\leq 1) \\[2ex] \dfrac{(\log x/R)^2}{2\log R} & (1\leq x<R) \end{cases}$$

Δ は回転に対して不変であるから，$C_{SD}(z)=C_{SD}(|z|)$．(6) より $\log C_{SD}(z)$ は $|z|=1$ において微分可能でない．

最後に Ω の Bergman 核 $K(z,\bar{\zeta})$ に対し計量 $ds_K=\sqrt{\pi K(z,\bar{z})}\,|dz|$ を考える．ds_K の曲率 $\kappa(ds_K)$ は円環の場合でも -4 より小さい点も大きい点も存在する（単連結領域の場合は $\kappa(ds_K)=-4$）．上記の円環 Δ について示す．Δ の普遍被覆面を右半平面 Π へ写す．このとき

$$w = \exp\left(\frac{\log z}{2\log R}\pi i\right), \quad \mathrm{Re}\, w > 0.$$

Δのグリーン函数はΠにおいて

$$g(W, w) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \log\left|\frac{W+\overline{w_\nu}}{W-w_\nu}\right|,$$

と表わされる[9]. ここに$w_0 = w$, $w_\nu = e^{\frac{-\pi^2}{\log R}} w_{\nu-1}$.

これから

$$C_\beta(w) = \frac{1}{2\,\mathrm{Re}\, w} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \left|\frac{w-w_\nu}{w+\overline{w_\nu}}\right|.$$

Π'は添数0を除いた積を表わす. 等式(1)を用いて計算すると,

$$\pi K(w, \overline{w}) = \frac{1}{4(\mathrm{Re}\, w)^2} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\overline{w_\nu'}}{(w+\overline{w_\nu})^2}.$$

Σ'は0を除いた和を表わす. $-R < z < R$のとき,

$w = e^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ $a = e^{-\frac{\pi^2}{\log R}}$ とおいて

$$\pi K(w, \overline{w}) = \frac{1}{4\cos^2\theta} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{a^\nu((1+a^{2\nu})\cos 2\theta + 2a^\nu)}{(1+2a^\nu\cos 2\theta + a^{2\nu})}$$

さらにΔのポアンカレ計量を$\rho(w)|dw|$とかけば

$$\rho(w) = \frac{1}{2\cos\theta}$$

ρ^2とπKをひ較する。$2a^\nu/(1+a^{2\nu})$はνが± 1のとき最大

だから，$\cos 2\theta \leqq -2a/(1+a^2)$ となる w については $\pi K(w,\bar{w})$ の第2項は負となる．また $|\theta| \leqq \frac{\pi}{4}$ のときはその項は正．よってそれぞれの場合に応じて $\pi K \leqq \rho^2$，$\pi K \geqq \rho^2$．

$$H(w) = \log \frac{\pi K(w,\bar{w})}{\rho^2(w)} \longrightarrow 0 \qquad (w \to iy)$$

だから，$H(w)$ は最大値および最小値を Π の内点 w_0 および w_1 でとる．それ等の点では $\Delta H \leqq 0$，および $\Delta H \geqq 0$ だから，最大値をとる点では

$$-\Delta \log\sqrt{K(w_0,\bar{w}_0)} \geqq -\Delta \log \rho(w_0)$$

$\pi K(w_0,\bar{w}_0) > \rho(w_0)$ より

$$\frac{-\Delta \log\sqrt{K(w_0,\bar{w}_0)}}{\pi K(w_0,\bar{w}_0)} > -\frac{\Delta \log \rho(w_0)}{\rho(w_0)^2} = -4.$$

同様にして w_1 にたいし，$\kappa(ds_K) < -4$．

さらに，O_G の場合であるが，種数1の閉リーマン面については，$\kappa(ds_K) \equiv 0$ となることが容易にわかる．したがって Bergman 計量 ds_K の曲率のすべてのリーマン面に関する上限は0である．

REFERNCES

[1] Ahlfors, L. V., and Beurling, A. Conformal invariants and function-theoretic null-sets. Acta Math. 83 (1950), 109-129.

[2] Bergman, S. The kernel function and conformal mapping. Math. Surveys 5, Amer. Math. Soc. Prov. R. I. (1950).

[3] Burbea, J. The Carathéodory metric in plane domains. Kōdai Math. Sem. Rep. 29 (1977), 157-166.

[4] Sakai, M. Analytic functions with finite Dirichlet integrals. To appear.

[5] Sario, L., and Oikawa, K. Capacity functions. Springer-Verlag 1969.

[6] Suita, N. Capacities and kernels on Riemann surfaces. Arch. Rat. Mech. Anal. 46 (1972), 212-217.

[7] _____ On a metric induced by analytic capacity. Kōdai Math. Sem. Rep. 25 (1973), 215-218.

[8] _____ On a metric induced by analytic capacity II. Ibid. 27 (1976), 159-162.

[9] Tsuji, M. Potential theory in modern function theory. Maruzen 1959.

[10] Yamada, A. On the linear transformations of Ahlfors functions. To appear.

[11] Zarankiewicz, K. Über ein numerisches Verfahren zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete. Z. Angew. Math. Mech. 14 (1934) 97-104.