数理解析研究所講究録
第 324 巻 1978 年 1-16

ソリトン理論からの話題

阪大 理　田中俊一

可換な微分作用素

L，Mを常微分作用素とする． L，Mが可換である，すなわち交換子

$$[L,M]=LM-ML$$

が0である，ときL，Mはどのようなものか． Burchnall，Chaundy は 1922年の [1] に始まる一連の論文でこの問題を研究した．

関数 $c(x)$ に対し

$$L_c = c^{-1}Lc$$

とおく． 変換 $L, M \to L_c, M_c$ と独立変数 x の変数変換により

$$L=\sum_{j=0}^{n} a_j(x)D^j,\quad M=\sum_{j=0}^{m} b_j(x)D^j \qquad D=\frac{d}{dx}$$

において

$$a_n,\ a_{n-1},\ b_m,\ b_{m-1}\ \text{定数}$$

$$a_{n-1}=0$$

の場合に制限して一般性は失なわれない．彼等は一般の場合もあつかっているがここでは簡単な場合としてLが二階であるとする．

$$L = -D^2 + u$$

とおく．Lの巾はLと可換であるから，Mとして m 奇数 $b_{m-1}=0$ のものをとって一般性は失なわれない．記号を変えてLが

$$A_n = D^{2n+1} + \sum_{j=0}^{2n-1} a_j(x) D^j$$

と可換となるのはいかなる場合かを問題にする．

交換子 $[A_n, L]$ が微分の項をふくまず，関数のかけ算のみによる場合 L と A_n は準可換 (semi-commutative) であるという．まず準可換となる条件を調べよう．$[A_n, L]$ において D^j $(j \geqq 1)$ の係数が 0 ということより

$$2a_{j-1}' + a_j'' + \sum_k a_{j+k} u^{(k)} = 0$$
$$(j = 1, 2, \quad , 2n)$$

が成立し $a_{2n+1} = 1$，$a_{2n} = 0$ であるから各係数 $a_j(x)$ は j の大なる順に加法定数を法として一意的に定まってゆく．しかしこの直接的な決定法は n が小さい場合の計算には使えるにせよ準可換性の構造についての情報は与えてくれない．とくに係数 a_j は $u(x)$ の微分多項式となることが期待されるがそれも明らかではない．

f を L の任意の固有関数

$$Lf = \lambda f$$

とすると，$f'' = (u-\lambda)f$ を用いて $A_n f$ における f の二階以上の微分は消去できる．

$$A_n f = Pf' + Qf$$

となったとする．ここに P, Q は λ の多項式で係数は a_i の微分多項式である．

$$[A_n, L]f = (\lambda - L)A_n f$$

に代入すると

$$[A_n L]f = \{Q'' + 2(u-\lambda)P' + u'P\}f + (P'' + 2Q')f.$$

したがって $[A_n, L]$ の準可換性と条件

$$\begin{cases} P'' + 2Q' = 0, \\ K_n = Q'' + 2(u-\lambda)P' + u'P \text{ は } \lambda \text{ によらない}, \end{cases}$$

は同値である．Q を消去すると，

$$K_n = -\frac{1}{2}P''' + 2(u-\lambda)P' + u'P \text{ は } \lambda \text{ によらない},$$

が準可換性の条件である．

$$P = \sum_{j=0}^{n} p_j(x)\lambda^{n-j}$$

とおくとその条件は

$$p_0' = 0$$

$$-\frac{1}{2}p_j''' + 2up_j' - 2p_{j+1}' + u'p_j = 0 \quad (0 \leq j \leq n-1).$$

K_n は(λ の)定数項として

$$K_n = -\frac{1}{2}p_n''' + 2up_n' + u'p_n$$

とあらわされる．

ここで議論を逆転して p_j $(j=0,1,2,\cdots)$ は $p_0'=0$,

(1) $$-\frac{1}{2}p_j''' + 2up_j' - 2p_{j+1}' + u'p_j = 0 \qquad (j=0,1,2,\cdots)$$

をみたすものとして順次定められたとする．

補題．p_j は $u(x)$ の微分多項式である．

証明．帰納法による．$p_0, p_1, \cdots, p_m$ は微分多項式であることが示されたとする．(1) に p_{m-j} をかけ $0 \leq j \leq m$ について加えれば

$$\begin{aligned}
2p_0 p_{m+1}' &= -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m} p_j''' p_{m-j} + 2u\sum_{j=0}^{m} p_j' p_{m-j} \\
&\qquad - 2\sum_{j=0}^{m-1} p_{j+1}' p_{m-j} + u'\sum_{j=0}^{m} p_j p_{m-j} \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\sum_{j=0}^{m} p_j'' p_{m-j}\Big)' + \frac{1}{4}\Big(\sum_{j=0}^{m} p_j' p_{m-j}'\Big)' \\
&\qquad + \Big(u\sum_{j=0}^{m} p_j p_{m-j}\Big)' - \Big(\sum_{j=0}^{m-1} p_{j+1} p_{m-j}\Big)'
\end{aligned}$$

となるから p_{m+1} も $u(x)$ の微分多項式である（証終）．

例．$p_0 = 1$

$p_1 = \frac{1}{2}u + c$

$p_2 = -\frac{1}{8}u'' + \frac{3}{8}u^2 + \frac{c}{2}u + d$

$p_3 = \frac{1}{32}u^{(4)} - \frac{5}{16}uu'' - \frac{5}{32}u'^2 + \frac{5}{16}u^3 - \frac{c}{8}u'' + \frac{3c}{8}u^2 + \frac{d}{2}u + e$

次に

$$[A_n, L] = 2p_{n+1}'$$

となるよう A_n の係数を $p_0, p_1, \cdots, p_n$ であらわす式をつくる.

$$[A_{n-1}, L] = 2p_n'$$

なる A_{n-1} が求まったとする.

$$[A_{n-1}L + LA_{n-1}, L] = (A_{n-1}L + LA_{n-1})L - L(A_{n-1}L + LA_{n-1})$$

$$= [A_{n-1}, L] + L[A_{n-1}, L]$$

$$= -4p_n' D^2 - 4p_n'' D - 2p_n''' + 4p_n' D$$

である. 一方

$$[2p_n D + p_n', L] = 4p_n' D^2 + 4p_n'' D + p_n''' + 2p_n u'$$

であるから

(2) $\qquad A_n = \frac{1}{2}(A_{n-1}L + LA_{n-1} + 2p_n D + p_n')$

とおくと

$$[A_n, L] = -\frac{1}{2}p_n''' + 2p_n' u + u' p_n = 2p_{n+1}'$$

となる. また (2) は

$$A_n = A_{n-1}L + p_n D - \frac{1}{2}p_n'$$

とあらわされるから次の結果を得る.

定理 $\quad p_j \ (j = 0, 1, 2, \cdots)$ を (1) の解である $u(x)$ の微分多項式とする.

$$A_n = \sum_{j=0}^{n} (p_j D - \frac{1}{2}p_j') L^{n-j}$$

とおく. そのとき交換子 $[A_n, L]$ は関数 $2p_{n+1}'$ のかけ算により定義される作用素である.

次に可換になる条件をもとめよう．

$$L f = \lambda f \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

の解空間の基底としてパラメーター τ による解 $c(x,\tau,\lambda)$，$s(x,\tau,\lambda)$ を $x=\tau$ における初期条件

$$c(\tau,\tau,\lambda) = s'(\tau,\tau,\lambda) = 1$$

$$c'(\tau,\tau,\lambda) = s(\tau,\tau,\lambda) = 0$$

から定める． A_n と L が可換ならば 2×2 行列 Λ_n があり

$$(A_n c \quad A_n s) = (c \quad s)\Lambda_n \qquad \Lambda_n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

とあらわされる．

$$A_n c = \alpha c + \gamma s = P c' - \frac{P'}{2} c$$

$$A_n s = \beta c + \delta s = P s' - \frac{P'}{2} s$$

において $x=\tau$ とおくと

$$\alpha = -\frac{P'}{2}, \qquad \beta = P,$$

x で微分して $x=\tau$ とおくと

$$\gamma = (u-\lambda)P - \frac{P''}{2}, \qquad \delta = \frac{P'}{2}$$

すなわち

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} -\frac{P'}{2} & P \\ (u-\lambda)P - \frac{P''}{2} & \frac{P'}{2} \end{pmatrix} \qquad (x=\tau \text{とおく})$$

を得る．

(3) $\det \Lambda_n = -\frac{1}{4}P'^2 + \frac{1}{2}PP'' - P^2(u-\lambda)$

であるが，

$$\frac{d}{d\tau}\det\Lambda_n = -PK_n$$

となり，右辺は可換性から 0，したがって $\det\Lambda_n$ は τ によらない。λ の多項式である．

$$R(\lambda) = \det\Lambda_n$$

とおく．計算により（あるいは Hamilton − Cayley により）

$$\Lambda_n^2 + R(\lambda)I = 0 \qquad I = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

したがって微分作用素

$$A_n^2 + R(L)$$

を解空間

$$Lf = \lambda f$$

に作用させると 0 行列で表現される．λ は任意であったから

$$A_n^2 + R(L) = 0.$$

次に $u(x)$ を具体的に表示する問題を考える．

$$P(x,\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - \mu_j(x))$$

$$R(\lambda) = \prod_{j=0}^{2n}(\lambda - \lambda_j)$$

とおくと (3) における λ^{2n} の係数を比較して

$$u(x) = \sum_{j=0}^{2n+1}\lambda_j - 2\sum_{j=1}^{n}\mu_j(x)$$

が得られる．また (3) において $\lambda = \mu_j$ とおくと

$$-\frac{1}{4}\left\{\mu_j'\prod_{k(\neq j)}(\mu_j - \mu_k)\right\}^2 = R(\mu_j)$$

したがって μ_j は非線型微分方程式系

$$\mu_j' = \frac{\pm 2i\sqrt{R(\mu_j)}}{\prod_{k(\neq j)}(\mu_j-\mu_k)} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

をみたしている．この方程式は超楕円曲線

$$\mu^2 = R(\lambda)$$

上のアーベル積分の理論により線型化され，$u(x)$ は Riemann のテータ級数を用いて表示される．一般の可換常微分作用素の組に対しては任意の代数曲線があらわれる（Krichever [2]）．

注意．フランスの求積家 J. Drach は別の方法で同じクラスの $u(x)$ をもとめている．彼は非線型方程式に対する Galois 理論の類似を研究し，それを $Ly = \lambda y$ に associate した Riccati 方程式

$$z' + z^2 + (\lambda - u(x)) = 0 \qquad z = y'/y$$

に適用した．

References

[1] J.L. Burchnall and T.W. Chaundy, Commutative ordinary differential operators, Proc. London Math. Soc. (2) 21 (1922), 420-440.

[2] J. Drach, Détermination des cas de réduction de l'équation différentielle $d^2x/d\,x^2 = [\phi(x)+h]y$, C.R. Acad. Sci. Paris 168 (1919), 47-50; Sur l'intégration par quadratures de l'équation $d^2y/dx^2 = [\phi(x)+h]y$, C.R. Acad Sci. Paris 168 (1919), 337-340.

[3] I.M. Krichever, Integration of nonlinear equations by the method of algebraic geometry, Funct. Anal. Appl. 11 (1977), 12-26.

Selfdual Yang-Mills 場と逆散乱法

A_μ ($\mu=1,2,3,4$) を Gauge Potential とよばれる $\mathbb{R}^4$ 上の $SU(2)$ の Lie 環に値をもつ関数であるとする。

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

を field strength という. gauge potential は $\mathbb{R}^4$ 上の $SU(2)$ ベクトル束の接続を定めるが $F_{\mu\nu}$ はその曲率テンソルである. 共変微分

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$$

を用いると

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu].$$

field strength の共役を

$$F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

にて定義する.

作用積分

$$S = \int L(x)\, d^4x \qquad L(x) = \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} F^*_{\mu\nu})$$

を stationary にする変分問題の Euler 方程式を Yang-Mills 場の方程式という. とくに S が minimum であることと

(1) $\qquad F_{\mu\nu} = a\, F^*_{\mu\nu} \qquad (a = \pm 1)$

とは同値である. (1) がみたされれば Yang-Mills 場の方程式もみたされる. (1) を (anti) Self-dual Yang-Mills 場の方程式という.

作用 S の minimum は N を Pontrjagin 数とすると $-8\pi^2 N$ である．数年前に $N=\pm 1$ の解が発見され (one) instanton とよばれている．一般の N に対する解（N-instanton）をもとめる方法は昨年 Ward [4], Atiyah-Ward [1], 独立に Belavin-Zakharov [2] により発見された．後者は逆散乱法の拡張であり，前者は $P^3(\mathbb{C})$ 上のベクトル束の理論に帰着させる代数幾何学的方法である．具体的に解をあらわす手順は異なるが定式化の部分は互に関連している．

(1) は

$$[D_1, D_2] = a[D_3, D_4]$$
$$[D_1, D_3] = -a[D_2, D_4]$$
$$[D_2, D_3] = a[D_1, D_4]$$

なる三つの式と同等である．複素パラメーター λ を含む微分作用素

$$L_1 = \lambda(D_2 - iD_1) + (D_4 + iD_3)$$
$$L_2 = \lambda(D_4 - iD_3) - (D_2 + iD_1)$$

を定義する．その交換子は

$$\begin{aligned}[L_1, L_2] = {} & [D_2 - iD_1, D_4 - iD_3]\lambda^2 \\ & + \{-[D_2 - iD_1, D_2 + iD_1] + [D_4 + iD_3, D_4 - iD_3]\}\lambda \\ & - [D_4 + iD_3, D_2 + iD_1]\end{aligned}$$

となる．したがって ${}^{\forall}\lambda$ に対して

（2）　$[L_1, L_2] = 0$

すなわち λ の各次の係数が0であることが（1）$(a=-1)$と同等である．（2）を（1）$(a=-1)$の可換な作用素表示として逆散乱の方法を適用できるというのが[2]の主張である．

解をもとめるには

（3）　$L_1\psi = L_2\psi = 0$

となる 2×2 行列に値をもつ関数 $\psi = \psi(\lambda, x)$ と gauge potentials を同時につくればよい．なぜならばそのとき

$$[L_1, L_2]\psi = 0$$

となり，$[L_1, L_2]$ は微分を含まない 2×2 行列値関数であり $\det\psi \neq 0$ ならば $[L_1, L_2] = 0$ となるからである．

なお[4]においても $P^3(\mathbb{C})$ から $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ への対応に関係して方程式系（3）があらわれる．λ はその fibre の座標である．

次の記号を定義しよう．

$$Z_1 = \frac{1}{2}(x_2 + ix_1), \quad Z_2 = \frac{1}{2}(x_4 + ix_3)$$

$$B_1 = A_2 - iA_1, \quad B_2 = A_4 - iA_3$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial Z_i}, \quad \nabla_i = \partial_i + B_i, \quad \overline{\nabla}_i = \partial_i - B_i^+ \quad (i=1,2),$$

ただし行列 C に対して $C^+ = {}^t\overline{C}$ である．これらの記号で（1）$(a=-1)$ は

$$\partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 + [B_1, B_2] = 0$$

$$\partial_i B_i^+ + \bar{\partial}_i B_i + [B_i, B_i^+] = 0,$$

また(3)は

(4) $(\lambda\nabla_1 + \bar{\nabla}_2)\psi(\lambda, x) = 0$

(5) $(\lambda\nabla_2 - \bar{\nabla}_1)\psi(\lambda, x) = 0$

となる.

(4)を

(4′) $\lambda B_1 - B_2^+ = \psi(\lambda, x)(\lambda\partial_1 + \bar{\partial}_2)\psi^{-1}(\lambda, x)$

とかきなおす. $\psi(\lambda, x)$ が(4′)をみたせば

$$\tilde{\psi}(\lambda) = (\psi^+)^{-1}(\bar{\lambda}^{-1})$$

は(同じ B_1, B_2 に対して)(5)の解である. したがって $\psi(\lambda, x)$ が

(6) $\psi^+(-\bar{\lambda}^{-1}) = \psi^{-1}(\lambda)$

をみたし(4)(または(4′))をみたすように B_1, B_2 (λ に無関係に注意)を定めることができると(5)は自動的にみたされて(1)の解が生じる. (4′)の左辺は λ の一次式であるから(6)をみたす λ の有理関数 $\psi(\lambda, x)$ を(4′)の右辺が λ の一次式になるようとればよい. B_1, B_2^+ はそのとき λ の係数, 定数項として定まり A_μ は解になる.

簡単な例として

(7) $\psi(\lambda, x) = uI + \lambda f A + \lambda^{-1}\bar{f}A^+$

の場合を調べよう. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, A 2×2 行列値関数 (Gauge potentialとは無関係)，u, f 関数 $\bar{u}=u$ である．(6)

より

$$\Psi^{-1}(\lambda,x)=uI-\lambda fA-\lambda^{-1}\bar{f}A^{+}$$

ともるはずである．

$$\Psi\Psi^{-1}=I$$

は

$$u^2=1+|f|^2\{A,A^{+}\} \qquad \{A,A^{+}\}=AA^{+}+A^{+}A$$

$$A^2=0$$

と同等である．さらに

$$\{A,A^{+}\}=I$$

を要求する．$A^2=0$とあわせるとある関数$a(x)$, $b(x)$により

$$A=\frac{1}{|a|^2+|b|^2}\begin{bmatrix} ab & a^2 \\ -b^2 & -ab \end{bmatrix}=\frac{1}{|a|^2+|b|^2}\begin{bmatrix} a & 0 \\ -b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とあらわされる．Ψを(4')の右辺に代入してλの一次式になるようにする．λ^3, λ^{-2}の係数が0である条件は

(8) $$A\,\partial_1 A=A\,\partial_2 A=0$$

である．

$$\partial_j A=\partial_j\left(\frac{1}{|a|^2+|b|^2}\right)\cdot A+\frac{1}{|a|^2+|b|^2}\left\{\begin{bmatrix} \partial_j a & 0 \\ -\partial_j b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & 0 \\ -b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial_j b & \partial_j a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

であるから

$$A\,\partial_j A=\frac{b\,\partial_j a-a\,\partial_j b}{|a|^2+|b|^2}A.$$

したがって

$$\partial_j a = \partial_j b = 0$$

すなわち　a, b が $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ の正則関数ならば（8）はみたされる。

λ^2, λ^{-1} の係数が 0 になるという条件は

$$f^{-1}\sqrt{1+|f|^2}(|a|^2+|b|^2) = z_1(a\bar{\partial}_2 b - b\bar{\partial}_2 a) - z_2(a\bar{\partial}_1 b - b\bar{\partial}_1 a) + c(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

（c は任意の $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ の正則関数）である。

とくに

$$a = \bar{z}_1, \quad b = \bar{z}_2, \quad c = 2$$

に対しては

$$f = \frac{r^2}{2\sqrt{1+r^2}} \qquad r^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$$

field B_i は

$$B_1 = \frac{1}{2(1+r^2)}\begin{bmatrix} \bar{z}_1 & 0 \\ -2\bar{z}_1 & -\bar{z}_1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = -\frac{1}{2(1+r^2)}\begin{bmatrix} \bar{z}_2 & 2\bar{z}_1 \\ 0 & -\bar{z}_2 \end{bmatrix}$$

となり結果は one-instanton 解となる。

次に N-instanton 解から $(N+1)$-instanton 解をつくる方法（Bäcklund 変換）について述べる。それは対応する解の間に

$$(9) \qquad \psi_{N+1} = \varphi\,\psi_N$$

なる関係があるとして得られる。$\varphi = \varphi(\lambda, x)$ は以下に定め

られる 2×2 行列値関数である。 φ, ψ_N が(6)をみたせば ψ_{N+1} も(6)をみたすので、 ψ_N, ψ_{N+1} に対しても一方の方程式(4)または(4′)のみを考えればよい。

既知とする N-instanton 場を B_i, もとめるべき(N+1) instanton 場を B_i' とすると(4′)型の式は

(10) $\lambda B_1 - B_2^{+} = \psi_N \, (\lambda \partial_1 + \bar{\partial}_2) \, \psi_N^{-1}$

(11) $\lambda B_1' - B_2'^{+} = \psi_{N+1} (\lambda \partial_1 + \bar{\partial}_2) \, \psi_{N+1}^{-1}$.

(11)の右辺は(9)を代入すると

$$
\begin{aligned}
&\varphi \psi_N \, (\lambda \partial_1 + \bar{\partial}_2)(\psi_N^{-1} \varphi^{-1}) \\
&= \varphi \psi_N \{(\lambda \partial_1 + \bar{\partial}_2) \psi_N^{-1}\} \varphi^{-1} + \varphi (\lambda \partial_1 + \bar{\partial}_2) \varphi^{-1} \\
&= \varphi (\lambda B_1 - B_2^{+}) \varphi^{-1} + \varphi (\lambda \partial_1 + \bar{\partial}_2) \varphi^{-1} \\
&= \varphi (\lambda \nabla_1 + \bar{\nabla}_2) \varphi^{-1} .
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\lambda B_1' - B_2' = \varphi (\lambda \nabla_1 + \bar{\nabla}_2) \varphi^{-1}
$$

が成立するように φ, B_i' を定めればよい。 あるいは右辺が λ の一次式になるように φ を定め次に B_i' を定めればよい。それは φ として(7)の形を仮定して one-instanton 解のときの議論を少し modify してもとめられる。

この方法で N-instanton 解がすべて得られるのか、その具体的な表示式が得られるのかは不明である。 一方[1]に続く論文(プレプリント)で N-instanton の具体的記述が完成

したらしい。 しかし作用<∞との条件をつけずに方程式(1)に対して逆散乱法における諸問題(ソリトン解，不変積分の系列の構成，Jacobi多様体上での線型化 ‥‥)を考えることは今後にのこされていると思はれる．

Remark. Ward [4]はPenroseによる(self-dual) Einstein方程式の理論[3]のYang-Mills場におけるanalogyとして得られた． [3]の結果からEinstein方程式のInstanton的な解の構成がすぐできるわけではないが，現在のところその唯一の手がかりであろう．

References

[1] M.F. Atiyah and R.S. Ward, Instantons and algebraic geometry, Commun. math. Phys. 55 (1977), 117-124.

[2] A.A. Belavin and V.E. Zakharov, Yang-Mills equations as inverse scattering problem, Phys. Lett. 73 B (1978), 53-57.

[3] R. Penrose, Nonlinear gravitons and curved twistor theory, Gen. Rel. Grav. 7 (1976), 31-52.

[4] R.S. Ward, On self-dual gauge fields, Phys. Lett. 61 A (1977), 81-82.