数理解析研究所講究録
第 325 巻 1978 年 39-41

2-Factorization in Finite Groups

愛教大　　林　誠

pを素数、Gを有限群、SをGの1でないp-部分群とする。Gの部分群の族$\mathfrak{G}(S)$を次の様に定義する：

$\mathfrak{G}(S) \ni H \iff$ (1) SはHのp-Sylow群　(2) $O_{p';E}(H) \leq O_{p'}(H)$
(3) Hは$Qd(p)$をinvolveしない。

問題1. Sを媒介として、$\mathfrak{G}(S)$の元同士にはどんな関係があるか？ 特に、$\mathfrak{G}(S)$に包含関係で最大元が存在するか？

問題2. Gと$\mathfrak{G}(S)$の関係は如何に？

これ等の問題はThompson, Glauberman等に依り提唱され、主に彼等に依って、幾つかの目覚しい結果が得られた。しかし、$p=2$に対する結果は未だに不十分であり、こゝでは、その場合に関する結果を紹介する。

尚、最近新たに、条件(3)を除いて、H及びGの構造を考察する問題 "Failure of Factorizations", "Pushing up Theorems" がGlauberman, Ho, Aschbacher, Dauman, Niles等に依り研究されている。

定義：πを素数の集合，Xを有限群とするとき，$\mathcal{L}(X:\pi)$でXにinvolveされるすべての部分群Dで，次の性質を有するものを表わす．(α) $D \triangleright {}^{\exists}E$：単純群，(β) $C_D(E) \subseteq E$
(γ) D/Eはπに属する或る素数$p(\geq 5)$に対し，位数$2p$の2面体群をinvolveする。

定理：πを素数の集合，SをGの1でない2-部分群とする。

仮定：$1 \neq {}^{\forall}T \subseteq S$ such that $T \triangleleft N_G(S)$

に対し，

(1) Sは$N_G(T)$の或る2-Sylow群の中で正規，

(2) $\mathcal{L}(N_G(T)/C_G(T):\pi) = \phi$

このとき，Sの1でない部分群$W(S)$で次の条件を満たすものが存在する．

(a) $W(S) \triangleleft N_G(S)$

(b) $W(S)O(H) \triangleleft H$

ここで，Hは次の条件を満たすGの任意の可解部分群

(α) SはHの2-Sylow群

(β) Hは$Qd(2)(\cong S_4)$-free

(γ) Hはπ-group

(注.1). 定理の条件(1)はSがGの或る2-Sylow群の中で正規ならば満たされる。

(注.2) $W(S)$は H に依らない。

Hが非可解の場合も、$N_G(T)$ ($1 \neq \forall T \subseteq S$ such that $T \lhd N_G(S)$) の単純組成因子を制限することに依り、同様の定理が成りたつ。

これより、次の定理を得る。

定理(Glauberman): GをS_4-free な有限群とする。このとき、Gの2-Sylow群はStrongly closed な可換群($\neq 1$)を含む。

系(Glauberman Goldschmidt). GをS_4-freeな有限単純群とすると、Gは Goldschmidt群.