数理解析研究所講究録
第329巻 1978年 2-9

角のある領域における重調和方程式の解の正則性
〜Kondrat'evの論文に即して〜

東大・理　　水谷 明

平面上の領域Ωをしめる一様な板の線型曲げは、境界が固定されているとき、適当な単位系において、

$$[P]\begin{cases}\Delta^2 u = f & \text{in } \Omega\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial n}=0 & \text{on } \Gamma=\partial\Omega\end{cases}$$

と記述される。ここで，fは外部荷重，$\frac{\partial}{\partial n}$は外向法線方向の微分を示す。

板の曲げ問題において、有限要素法などにより近似解析を行う場合、近似解の収束性、収束の速さを決定するためには、問題[P]の解uの滑らかさが重要な役割を果す。

領域Ωとして、境界が滑らかでない最も簡単な多角形領域の場合につき、解uがどの程度滑らかになるかを調べることがこの話の目的である。

この問題については、Kondrat'ev [1] の研究があり、

" Ωが凸多角形領域のとき、$f \in L^2(\Omega)$ならば、
[P] の弱解 $u \in H_0^2(\Omega)$、即ち、

$$(\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad (\forall v \in H_0^2(\Omega))$$

を満足する解 $u \in H_0^2(\Omega)$ は $H^3(\Omega)$ に属す。"

ことを示した。

ここで、我々は、Ωの形状に更に制限を加えて、解uが $H^4(\Omega)$ に属すことを保証する結果を述べる。証明は Kondrat'ev [1] に従って行う。

<u>定理</u> Ωを各内角が$\pi/2$以下の多角形領域とする。
このとき、$f \in L^2(\Omega)$ならば、問題[P]の弱解 $u \in H_0^2(\Omega)$ は $H^4(\Omega)$ に属す。 ▨

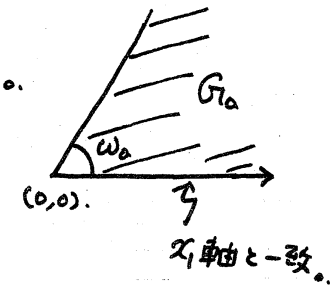
<u>注意</u> 上述の条件を満足するΩは、鋭角3角形と長方形に限られるが、良く知られているように、内角の大きさ如何にかかわらず、角の近傍を除けば、uの4回微分は二乗可積分である。従って、一般の多角形領域Ωの場合、$f \in L^2(\Omega)$に対し、Ωから、内角が$\pi/2$を越える角の近傍を

除いた部分において、解uの4回微分が二乗可積分であることがわかる。

定理の証明の方針。

以下証明の方針を述べる。

G_0を右図で示される平面上の領域とする。



重調和方程式の境界値問題

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } G_0 \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma_0 = \partial G_0 \end{cases}$$

を考える。(r,ω)を通常の極座標とし、更に $\tau = \log\frac{1}{r}$ と変数変換すると、(x_1, x_2)-平面上の領域G_0は、(τ,ω)-平面において、$D \equiv R^1 \times (0,\omega_0)$ に変換され、問題(1)は

$$(2)\quad \begin{cases} L u = e^{-4\tau} f & \text{in } D \\ u = \frac{\partial u}{\partial \omega} = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

と変換される。ここで、$L = L(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial\omega})$であり、具体的には、

$$Lu = u_{\tau\tau\tau\tau} + 4u_{\tau\tau\tau} + 2u_{\tau\tau\omega\omega} + 4u_{\tau\omega\omega} + 4u_{\tau\tau} + 4u_{\omega\omega} + u_{\omega\omega\omega\omega}\ ,$$

である。

重みつきの函数空間 $\overset{\circ}{W}{}^{k}_{\alpha}(G_0)$（$k$ は非負整数）を、

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{k}_{\alpha}(G_0)} = \sum_{m=0}^{k} \int_{G} r^{\alpha-2(k-m)} \times \sum_{|i|=m} |D^i u|^2 \, dx.$$

（i は multi-index）.
で定義する。

[1°] $e^{-4\tau} f = F$ とおくと、

$\|f\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k}_{\alpha}(G_0)}$ は、

$$\left\{ \sum_{i_1+i_2 \leq k} \int_D \left| \frac{\partial^{i_1+i_2} F}{\partial \tau^{i_1} \partial \omega^{i_2}} \right|^2 e^{-(\alpha-2k-6)\tau} \, d\omega d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}$$

と同等なノルムとなる。

問題 (2) を τ に関し、Fourier 変換を行うと、λ をパラメタとする、ω に関する常微分方程式の境界値問題 (3) に変換される。

$$(3) \quad \begin{cases} L(i\lambda, \frac{d}{d\omega}) \hat{u} = \tilde{F} & 0<\omega<\omega_0 \\ \hat{u} = \frac{d\hat{u}}{d\omega} = 0 & (\omega = 0, \omega_0) \end{cases}$$

但し、$\tilde{F}(\lambda, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} F(\tau, \omega) d\tau$,

$\hat{u}(\lambda, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} u(\tau, \omega) d\tau$, であり.

(3) の上式は、具体的には、

(4) $\hat{\tilde{u}}^{(IV)} + (-2\lambda^2 + 4i\lambda + 4)\hat{\tilde{u}}'' + (\lambda^4 - 4i\lambda^3 - 4\lambda^2)\hat{u} = \hat{\tilde{F}}$

となる。

[2°] (Agranovich - Visik).

問題 (3) に対し、$\hat{\tilde{F}}$ を $\hat{u}$ に対応させる作用素 $R(\lambda)$,

$$R(\lambda) : L^2(\hat{D}) \longrightarrow H^4(\hat{D}) \cap H_0^2(\hat{D}) \qquad (\hat{D} = (0, \omega_0)).$$

が存在し、次を満たす。即ち、$R(\lambda)$ は、

1) λ に関し有理型で、

2) 任意の $p > 0$ に対し、$\delta > 0$ が存在して、
$R(\lambda)$ は、$\Lambda_{p\delta} \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, |\mathrm{Im}\,\lambda| < p$ かつ $|\mathrm{Re}\,\lambda| > \delta\}$
において極が存在しない。

3) 更に、次の評価が成立する。
$\exists\, C_1 = C_1(p, \delta)\,;$

$$(|\lambda|^4 \|R(\lambda)\hat{\tilde{F}}\|_{L^2(\hat{D})})^2 + \|R(\lambda)\hat{\tilde{F}}\|^2_{H^4(\hat{D})} \leq C_1 \|\hat{\tilde{F}}\|^2_{L^2(\hat{D})}$$

$(\forall \hat{\tilde{F}} \in L^2(\hat{D}),\ \forall \lambda \in \Lambda_{p\delta}$ に対して$)$

[1°], [2°] により、問題 (1) に対する Kondrat'ev の定理 [3°]、及び正則性の定理 [4°] が成り立つ。

[3°] (Kondrat'ev)

$R(\lambda)$ が直線 $\mathrm{Im}\,\lambda = (-\alpha+6)/2$ 上に極がないとすると，
$\forall f \in \mathring{W}^0_\alpha(G_0)$ に対し，(1) の解 $u \in \mathring{W}^4_\alpha(G_0)$ が存在して，
評価

$$\|u\|_{\mathring{W}^4_\alpha(G_0)} \leq C_1 \|f\|_{\mathring{W}^0_\alpha(G_0)}.$$

が成立する。

[4°] (Kondrat'ev)

問題 (1) において，u は $\mathring{W}^4_4(G_0)$，f は $\mathring{W}^0_0(G_0) = L^2(G_0)$
に属すと仮定し，更に，$R(\lambda)$ が $1 \leq \mathrm{Im}\,\lambda \leq 3$ に極がないとすると，u は $\mathring{W}^4_0(G_0)$ に属す。

元の問題[P] に戻る。

任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対し，$u \in H^2_0(\Omega)$ が一意的に存在して，

$$(\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)}. \quad (\forall v \in H^2_0(\Omega))$$

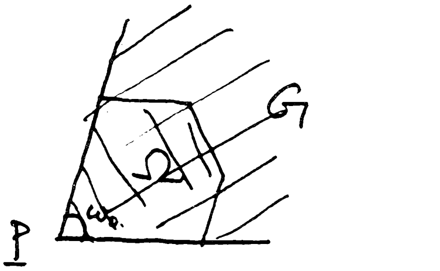
を満たすが、容易な計算により，

[5°] $u \in \mathring{W}^4_4(\Omega)$ が成立する。

但し，$\mathring{W}^k_\alpha(\Omega)$ は、P_j を Ω の頂点，$r(x) = \min_j (\mathrm{dist}(x, P_j))$ として

$$\|u\|^2_{\mathring{W}^k_\alpha(\Omega)} = \sum_{m=0}^{k} \int_\Omega r^{\alpha-2(k-m)} \sum_{|i|=m} |D^i u|^2 dx.$$

によってノルムを定義した重みつきの函数空間である。



PをΩの一つの頂点とし、
右図のような cone をGとする。
Pに於ける内角をω_0とする。

[6°] 問題(1)′ $\Delta^2 v = f$ in G ; $v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$ on ∂G

に対応する([2°]における)$R(\lambda)$が $1 \le \mathrm{Im}\,\lambda \le 3$ に極がない、と仮定すると、(1)の解uは、$\mathcal{O}$をPの(小)近傍として、$u \in H^4(\mathcal{O} \cap \Omega)$ が成り立つ。

∵ 通常の局所的議論、及び、[4°],[5°]より、[6°]が成立することがわかる。

角の近傍を除いた部分においては、uは、滑らかであるので、

[7°] ω_0が$\pi/2$以下のとき、問題(1)に対応する$R(\lambda)$が、$1 \le \mathrm{Im}\,\lambda \le 3$ に極がない。

ことを示せば、定理の証明は完了する。

[7°]の証.

問題(3)で右辺$\hat{F} = 0$とおいた問題を考える。

$$
(5)\begin{cases}\hat{u}^{(\mathrm{IV})}+(-2\lambda^2+4i\lambda+4)\hat{u}''+(\lambda^4-4i\lambda^3-4\lambda^2)\hat{u}=0 & (0<\omega<\omega_0)\\[4pt] \hat{u}=\dfrac{d\hat{u}}{d\omega}=0 & (\omega=0,\ \omega_0)\end{cases}
$$

但し ′ は $\frac{d}{d\omega}$ を示す。

$\beta^4+(-2\lambda^2+4i\lambda+4)\beta^2+(\lambda^4-4i\lambda^3-4\lambda^2)=0$ の根は，

$\beta=\pm\lambda,\ \pm i(i\lambda+2)$ より，(5)の一般解は，$\lambda\neq 0, 2i$，このとき

$$\hat{u}=c_1\cos i\lambda\omega+c_2\sin i\lambda\omega+c_3\sin(i\lambda+2)\omega+c_4\cos(i\lambda+2)\omega.$$

λが$R(\lambda)$の根であることと，(5)に自明でない解があることとは，同値であり，その条件は，

$$
(6)\quad \begin{vmatrix} 1 & \cos i\lambda\omega_0 & 0 & i\lambda\sin i\lambda\omega_0 \\ 0 & \sin i\lambda\omega_0 & i\lambda & i\lambda\cos i\lambda\omega_0 \\ 0 & \sin(i\lambda+2)\omega_0 & i\lambda+2 & (i\lambda+2)\cos(i\lambda+2)\omega_0 \\ 1 & \cos(i\lambda+2)\omega_0 & 0 & -(i\lambda+2)\sin(i\lambda+2)\omega_0 \end{vmatrix}=0.
$$

$-z=i\lambda+1$ と変数変換して計算すると，(6)の左辺の行列式は，$4(z^2\sin^2\omega_0-\sin^2 z\omega_0)$ となる。

計算によると，$z^2\sin^2\omega_0-\sin^2 z\omega_0=0$ は，$\omega_0\leq\frac{\pi}{2}$ のとき，$0\leq \mathrm{Re}\,z\leq 2$ の範囲で，$z=0, 1$ 以外の根はないことがわかる。従って(6)の根は，$1\leq \mathrm{Im}\,\lambda\leq 3$ の範囲で，$\lambda=i, 2i$ のみをもつが，$\lambda=0, 2i, i$ は他の計算により，$R(\lambda)$の根でないことがわかっているので，[7°] が示された。Q.E.D.

$\boxed{\text{文献}}$ V. A. Kondrat'ev [1] Trans of the Moscow Math Soc. 16
227—313 (1967)