数理解析研究所講究録
第 335 巻 1978 年 138-154



# 対流における1つの混合境界値問題

名大 工学部 桑原真二

## §1. 物理的問題設定

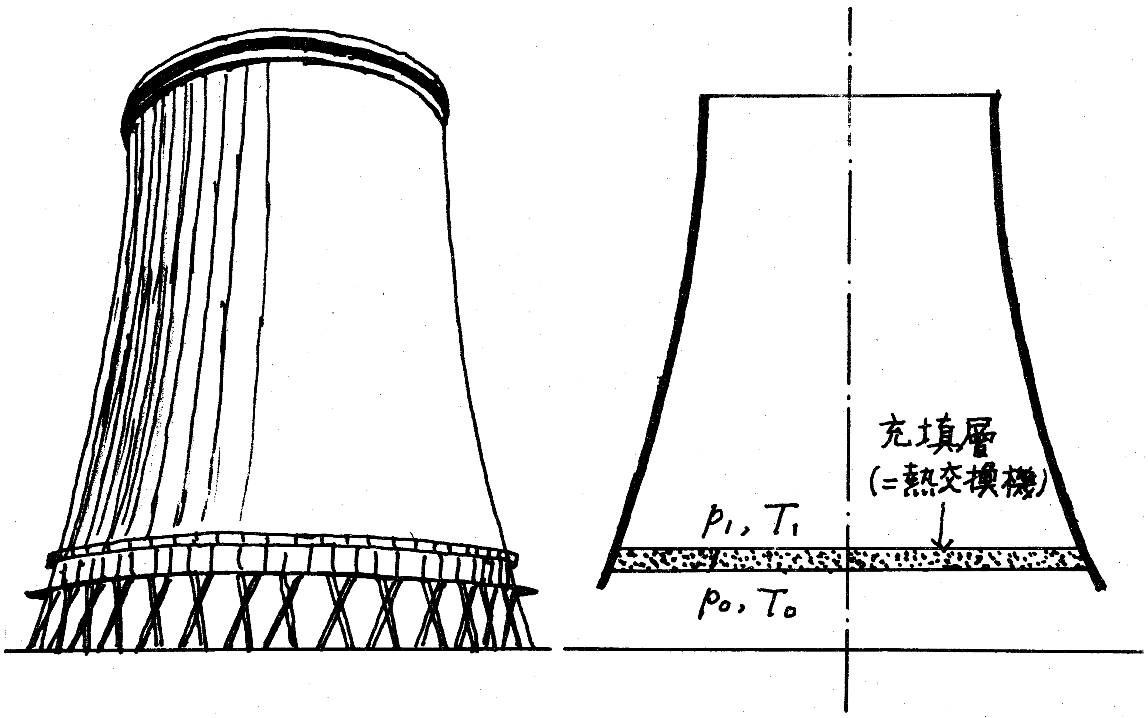
原子炉あるいは工業用熱交換機には、第1図(a)に示すような冷却塔が附随している。このような冷却塔の構造は第1図(b)に示すように、その底部に熱交換機があり、こゝでえた熱による浮力を起動力として自然対流が起る。この論文では、適当な物理的モデルをつくって問題を簡単化して、数学的解析を行う。

われわれは第1図(b)に示すように、塔の上部と底部で限られた塔の内部の流れにのみ着目し、まず次のような近似を行う。

i) 内部の流れについては、密度変化の効果は浮力の項のみ考慮し(Boussinesq 近似)、粘性、熱伝導性は無視する。

ii) 底部の充填層(=熱交換装置)における仮定:

a) 充填層通過後の状態は、通過直前の圧力 $p_0$、と温度 $T_0$ だけにより、通過前の流れの影響はうけない。




(a) 外形　　　(b) 内部構造

第1図　冷却塔の概念図

b) 充填層通過後の流速の法線成分 $w_1$ は層前後の圧力差だけにより、前後の温度差は $w_1$ だけによる。

この論文では

$$w_1 = C(p_0 - p_1)^k \qquad 0.5 \leq k \leq 1.5 \tag{1.1}$$

$$T_1 - T_0 = (T_m - T_0)\, w_0 / (w_1 + w_0) \tag{1.2}$$

という形を採用する。こゝで $C$, $k$, $T_m$, $w_0$ は定数, $p_1$, $T_1$ は通過直後の圧力, 温度である。$T_m$, $T_0$ の意味は

$w_1 \longrightarrow 0$ に対して　$T_1 = T_m$ (最高)　　(1.3a)

$w_1 \to \infty$ に対して　　$T_1 = T_0$　　(1·3b)

である。

iv) 塔の上部での境界条件。塔の上部は半径 $a$ の円形の水平面とし、その面上で圧力 $p$ および速度の接線成分 $u, v$ が与えられているものとする。この論文では冷却塔が風にさらされていないとし、軸対称流を仮定して、

$$p = p_0 \tag{1·4}$$

$$u = v = 0 \tag{1·5}$$

とおく。こゝで $p_0$ は遠くでの圧力とする。

Bousinesq 近似の方程式は

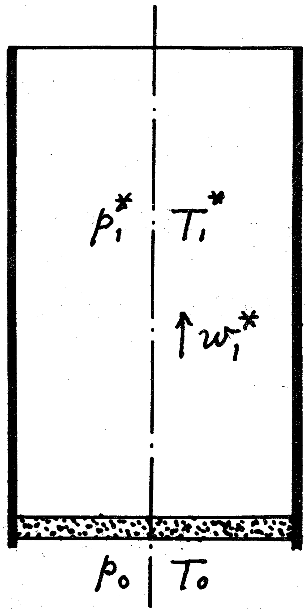
$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \tag{1·6}$$

$$\rho_0 \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\mathrm{grad}\, p + \frac{\rho_0 g}{T_0}(T - T_0)\boldsymbol{e}_z \tag{1·7}$$

で与えられる。こゝで $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ は流速，$p$, $T$ は圧力と温度，$\rho_0$ は密度（一定），$\boldsymbol{e}_z$は垂直上方にとった$z$方向の単位ベクトルである。$p_0$, $T_0$, $\rho_0$ は $p_0 = R\rho_0 T_0$（$R$ は気体定数）を満足する基準の圧力，温度，密度で、こゝでは冷却塔の外部で支配する一定値である。

自然対流においては、境界条件からきまる明確な代表的速度はない。そこで最も簡単な円筒形の塔の中の自然対流を考え、このばあいにえられる一定の上昇流速を代表値としてとる（第2図）。

塔の底部の充填層で一様に温められた空気は、一定の温度 $T_1^*$ ( $T_1^*>T_0$ , $T_1^*-T_0=\Delta T$ , (1-2)) となり、熱伝導を省略しているから、上昇しても同じ値を保つと考えられる。また流れは平行流を仮定し




第2図 円筒形冷却塔

$$u=v=0$$

$$w=w(z)$$

とおくと, (1-6), (1-7) は

$$\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (1\cdot 8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\rho_0 g}{T_0}(T_1^*-T_0) \qquad (1\cdot 9)$$

となる。(1-8) を境界条件 (1·1), (1-9) を境界条件 (1-4) のもとに解くと

$$w=w_1^*, \qquad p-p_0=\frac{\rho_0 g}{T_0}\Delta T(z-h) \qquad (1-10)$$

をうる。(1-10) の第2式から $p_1^*$ がきまる:

$$p_0-p_1^*=\frac{\rho_0 g}{T_0}\Delta T h \qquad (1-11)$$

(1·1), (1·2) ( $w_1$, $T_1$, $p_1$ 等には * をつける), (1-11) は未知数 $w_1^*$, $T_1^*$, $p_1^*$ あるいは $w_1^*$, $\Delta T$ $(=T_1^*-T_0)$, $\Delta p = p_0-p_1^*$ に対する連立代数方程式となる:

$$w_1^*=C(\Delta p)^k$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta T &= \Delta T_m w_0/(w_1^* + w_0) \qquad \Delta T_m \equiv T_m - T_0 \\ \Delta p &= \rho_0 g \Delta T h/T_0 \end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}12)$$

これらから代表的速度 $w_1^*$ がきまる。(1-11) から $w_1^*$, $\Delta p$ を消去すると

$$C(\rho_0 g h/T_0)^k (\Delta T)^{k+1} + w_0 \Delta T - \Delta T_m w_0 = 0 \qquad (1\text{-}13)$$

をうる。

## §2. 一般斜交座標系

ここでは，境界条件を完全に満足しうるような一般斜交座標系を導入する。3次元 Euclid 空間のデカルト座標を

$$\left.\begin{aligned} &x^1, x^2, x^3 \ : \text{位置座標} \\ &\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3 \ : \text{基本(単位)ベクトル} \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}1)$$

とかく。Euclid 空間の中に3つの独立な面の族を設定する：

$$\left.\begin{aligned} &f^\alpha(\mathbb{x}) = \xi^\alpha \qquad \alpha = 1, 2, 3 \\ &\mathbb{x} = x^\alpha \mathbb{e}_\alpha \equiv x^1\mathbb{e}_1 + x^2\mathbb{e}_2 + x^3\mathbb{e}_3 \\ &\partial(f_1, f_2, f_3)/\partial(x^1, x^2, x^3) \neq 0 \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}2)$$

第3式は Jacobian である。$\xi^\alpha = \text{const.}$ は1つの曲面に対応し、したがって $\xi^1$, $\xi^2$, $\xi^3$ に適当な値を与えると，Euclid 空間中の1点がきまる。そこで $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ ($\equiv \boldsymbol{\xi}$ と略記する) は座標の意味をもつ。(2-2) を解いて

$$x^\alpha = g^\alpha(\boldsymbol{\xi}) \qquad \alpha = 1, 2, 3 \qquad (2\text{-}3)$$

そこで

$$\mathbb{x} = x^\alpha \mathbb{e}_\alpha = g^\alpha(\xi)\,\mathbb{e}_\alpha = \mathbb{x}(\xi) \qquad (2\text{-}4)$$

をうる。こゝで，ξ座標についての基本ベクトルを定義する：

$$\mathbb{a}_\alpha = \partial \mathbb{x} / \partial \xi^\alpha \qquad (2\text{-}5)$$

$\mathbb{a}_1$ は $\xi^2 = \mathrm{const}$, $\xi^3 = \mathrm{const}$. の曲線の方向，$\xi^1$ の増加する向きに向いている。

ベクトル $(dx^1, dx^2, dx^3)$ はまたξ座標で $(d\xi^1, d\xi^2, d\xi^3)$ であらわされる：

$$d\mathbb{x} \equiv dx^\alpha \mathbb{e}_\alpha = d\xi^\alpha \mathbb{a}_\alpha \qquad (2\text{-}6)$$

これより

$$\mathbb{a}_\alpha = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\mathbb{e}_\lambda, \qquad \mathbb{e}_\alpha = \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\alpha}\mathbb{a}_\lambda \qquad (2\text{-}7)$$

の関係がえられる。

逆基本ベクトル $\mathbb{a}^1, \mathbb{a}^2, \mathbb{a}^3$ を

$$\mathbb{a}^\alpha = \mathbb{a}_\beta \times \mathbb{a}_\gamma / (\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3) \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \text{ は } (1, 2, 3) \text{ の循環的交換} \qquad (2\text{-}8)$$

で定義する。こゝで

$$(\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3) = \mathbb{a}_1 \cdot (\mathbb{a}_2 \times \mathbb{a}_3) \qquad (2\text{-}9)$$

は $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3$ のはる平行6面体の体積である。また

$$\left.\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \mathbb{a}_\alpha \cdot \mathbb{a}_\beta = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\beta} \\ g^{\alpha\beta} &= \mathbb{a}^\alpha \cdot \mathbb{a}^\beta = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}10)$$

を定義すると

$$a_\alpha = g_{\alpha\lambda}\, a^\lambda, \qquad a^\alpha = g^{\alpha\lambda}\, a_\lambda \tag{2-11}$$

の関係が得られる。基本ベクトル，逆基本ベクトルの間には直交関係：

$$a_\alpha \cdot a^\beta = \delta_\alpha{}^\beta \tag{2-12}$$

があることが容易にわかる。

位置変化：$\xi \to \xi + d\xi$ による $a_\alpha$ の変化はテンソル $\Gamma_\alpha{}^\mu{}_\lambda$ であらわされる：

$$\left.\begin{aligned} a_\alpha(\xi + d\xi) &= a_\alpha(\xi) + \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\lambda} d\xi^\lambda + O(d\xi^2) \\ \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\lambda} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\alpha} = \Gamma_\alpha{}^\mu{}_\lambda\, a_\mu \end{aligned}\right\} \tag{2-13}$$

ベクトル場 $v = v(x) = v(\xi)$ は $a_\lambda$, $a^\lambda$ に対応して

$$\left.\begin{aligned} v &= v^\lambda a_\lambda = v_\lambda a^\lambda \\ v^\lambda &= v \cdot a^\lambda \qquad v_\lambda = v \cdot a_\lambda \end{aligned}\right\} \tag{2-14}$$

の表現が可能である。$v^\lambda$ を反変成分，$v_\lambda$ を共変成分という。grad, div, rot 等は

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{grad} &= a^\mu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \\ \mathrm{div}\, v &= \frac{\partial v^\lambda}{\partial \xi^\lambda} + \Gamma_\mu{}^\lambda{}_\lambda\, v^\mu \\ (\mathrm{rot}\, v)^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{g_0}}\left(\frac{\partial v_\gamma}{\partial \xi^\beta} - \frac{\partial v_\beta}{\partial \xi^\gamma}\right) \quad (\alpha, \beta, \gamma):\text{循環置換} \end{aligned}\right\} \tag{2-15}$$

であらわされる。ここで

$$g_0 = \det(g_{\alpha\beta}) = (a_1, a_2, a_3)^2 \tag{2-16}$$

である。

(2-15) は $a^\alpha \cdot \left[\frac{D}{Dt}(v^\lambda a_\lambda) + \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p - K\right] = 0$ を実

行することによって基礎方程式(1.6), (1-7)は

$$\frac{\partial v^\lambda}{\partial \xi^\lambda} + \Gamma_\mu{}^\lambda{}_\lambda v^\mu = 0 \tag{2-17}$$

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + v^\lambda \frac{\partial v^\alpha}{\partial \xi^\lambda} + \Gamma_\lambda{}^\alpha{}_\mu v^\lambda v^\mu = -\frac{1}{\rho_0} g^{\alpha\lambda} \frac{\partial p}{\partial \xi^\lambda} + K^\alpha \tag{2-18}$$

をうる。ただし

$$\mathbb{K} = \frac{\beta g}{T_0}(T - T_0)\,\mathbf{e}_z$$

とおいてある。

§3. 数学的問題設定

第3図(a)にのその断面を示す回転双曲面で囲まれた高さ$h$, 上面の半径$a$, 下面の半径$b$の冷却塔を考える。回転双面は円柱座標$(r, \theta, z)$によって

$$\left.\begin{aligned} r &= a(1 + (z-h)^2/c^2)^{1/2}, \quad c = ah/\sqrt{b^2-a^2} \\ &0 \le z \le h \end{aligned}\right\} \tag{3-1}$$

で表わされるとする。そこで

$$\left.\begin{aligned} \xi^1 &= (1 + (z-h)^2/c^2)^{-1/2} r \\ \xi^2 &= \theta, \quad \xi^3 = z \end{aligned}\right\} \tag{3-2}$$

のように斜交座標をえらべば

$$\xi^1 = a, \qquad \xi^3 = 0, h \tag{3-3}$$

が筒の側面, 下面, 上面に対応する。

ここで次のような無次元化を行い, 無次元の量について同じ記号をもちいる:

$$\left.\begin{array}{l} x/a \rightarrow x, \quad t/(a/w_1^*) \rightarrow t, \quad w/w_1^* \rightarrow w \\ p'/\Delta p \rightarrow p', \quad T'/\Delta T \rightarrow T' \end{array}\right\} \qquad (3\text{-}4)$$

$\xi^1$, $\xi^2$, $\xi^3$ については

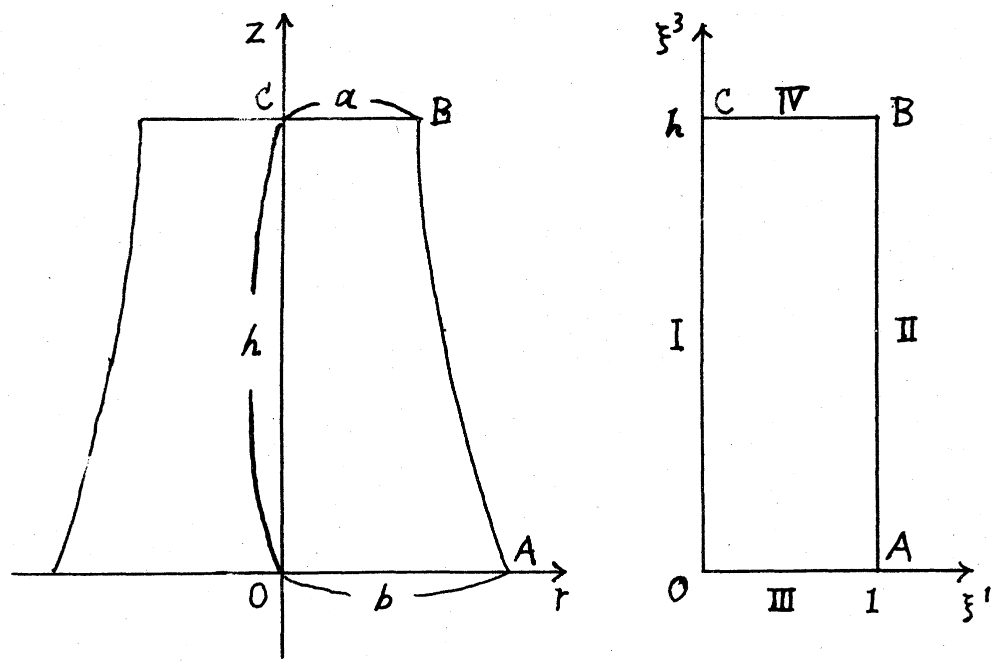
$$\xi^1/a \rightarrow \xi^1, \quad \xi^2 \rightarrow \xi^2, \quad \xi^3/a \rightarrow \xi^3 \qquad (3\text{-}5)$$

$a, b, c, h$ は

$$a/a \rightarrow 1, \quad b/a \rightarrow b, \quad c/a \rightarrow h/\sqrt{b^2-1}, \quad h/a \rightarrow h \qquad (3\text{-}6)$$

~~をもちい~~が対応する。

こゝで




(a) デカルト座標系　　(b) 斜交座標系

第3図　回転双曲面壁で囲まれた冷却塔

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos\theta\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\,\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin\theta\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\,\mathbf{e}_y \\ H(\xi^3) &= 1 + (\xi^3 - h)^2/c^2 \\ I(\xi^2) &= (\xi^3 - h)/c^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}7)$$

をもちいると(2-5),(2-9)によって

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{a}_1 = \sqrt{H}\,\mathbf{e}_r\,,\quad \mathbf{a}_2 = \xi^1\sqrt{H}\,\mathbf{e}_\theta\,,\quad \mathbf{a}_3 = \frac{\xi^1 I}{\sqrt{H}}\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z \\ &\mathbf{a}^1 = \frac{1}{\sqrt{H}}\left(\mathbf{e}_r - \frac{\xi^1 I}{\sqrt{H}}\mathbf{e}_z\right),\quad \mathbf{a}^2 = \frac{\mathbf{e}_\theta}{\xi^1\sqrt{H}}\,,\quad \mathbf{a}^3 = \mathbf{e}_z \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}8)$$

が得られる。$\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ は $x$, $y$ 方向の単位ベクトルであり

$$x = r\cos\theta\,,\qquad y = r\sin\theta \qquad (3\text{-}9)$$

である。

軸対称の流れのみを考えれば(2-17),(2-18)は

$$\frac{\partial v^1}{\partial \xi^1} + \frac{\partial v^3}{\partial \xi^3} + \frac{1}{\xi^1}v^1 + \frac{2I}{H}v^3 = 0 \qquad (3\text{-}10)$$

$$\frac{\partial v^1}{\partial t} + v^1\frac{\partial v^1}{\partial \xi^1} + v^3\frac{\partial v^1}{\partial \xi^3} + \frac{2I}{H}v^1 v^3 + \frac{\xi^1}{c^2 H}v^3 v^3$$

$$= -\frac{A}{H}\left\{1 + (\xi^1 I)^2/H\right\}\frac{\partial p'}{\partial \xi^1} + \frac{A\xi^1 I}{H}\frac{\partial p'}{\partial \xi^3} - \frac{A}{h}\frac{\xi^1 I}{H}T' \qquad (3\text{-}11)$$

$$\frac{\partial v^3}{\partial t} + v^1\frac{\partial v^3}{\partial \xi^1} + v^3\frac{\partial v^3}{\partial \xi^3} = \frac{A\xi^1 I}{H}\frac{\partial p'}{\partial \xi^1} - A\frac{\partial p'}{\partial \xi^3} + \frac{A}{h}T' \qquad (3\text{-}12)$$

ここで

$$A = \frac{g h \Delta T}{T_0 w_1^{*2}} \qquad (3\text{-}13)$$

は無次元の定数である。更にエネルギー方程式(=熱伝導方程式)は

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + v^1\frac{\partial T'}{\partial \xi^1} + v^3\frac{\partial T'}{\partial \xi^3} = 0 \qquad (3\text{-}14)$$

となる。

軸対称の流れでは，流れの関数 $\Psi$ を導入し，また渦度 $\boldsymbol{\omega}$ は $a_2$ (又は $a^2$) に平行な成分しかない：

$$v^1 = \frac{1}{\xi^1 H}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi^3}, \qquad v^3 = -\frac{1}{\xi^1 H}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi^1} \tag{3-15}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\, a_2 \tag{3-16}$$

もちろん，(3-15) は (3-10) を自動的に満足している。$\xi^1 = 0$ の境界条件を考慮して，われわれは

$$\Phi = \Psi/\xi^1, \qquad \Omega = \xi^1 \omega \tag{3-17}$$

を導入し，$\Phi, \Omega, T'$ および $P = p' + \frac{1}{2A}|v|^2$ についての連立の方程式を導く：

$$D\Phi = -\xi^1(2C_2^2 + C_3)\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} - \frac{1}{\xi^1 H}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} - \frac{\Phi}{\xi^1}\right) + 2C_3\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3} - (C_3 + C_2^2)\Phi + H\Omega \tag{3-18}$$

$$\begin{aligned} DP = &-\left(\frac{1}{\xi^1}C_1 + \xi^1 C_3\right)\frac{\partial P}{\partial \xi^1} + \frac{1}{A}\Big[\Big\{D\Phi + (2C_1/\xi^1 + \xi^1 C_3)\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} \\ &- C_2\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3} + C_3\Phi\Big\}\Omega + \Big\{C_1\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1}\right) - \xi^1 C_2\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3}\Big\}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi^1} \\ &+ \Big\{-\xi^1 C_2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3}\Big\}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi^3}\Big] + \frac{1}{\hbar}\left(-\xi^1 C_2\frac{\partial T'}{\partial \xi^1} + \frac{\partial T'}{\partial \xi^3}\right) \end{aligned} \tag{3-19}$$

$$-H\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(\Phi, \Omega)}{\partial(\xi^1, \xi^3)} + \frac{\Phi}{\xi^1}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi^3} = -\frac{1}{\xi^1}\Omega\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3} + \frac{A}{\hbar}\frac{\partial T'}{\partial \xi^1} \tag{3-20}$$

$$-H\frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{\partial(\Phi, T')}{\partial(\xi^1, \xi^3)} + \frac{\Phi}{\xi^1}\frac{\partial T'}{\partial \xi^3} = 0 \tag{3-21}$$

$$P = p' + \frac{1}{2A}\left\{C_1\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1}\right)^2 - 2\xi^1 C_2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3}\right)^2\right\} \tag{3-22}$$

$$D = C_1\frac{\partial^2}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} - 2\xi^1 C_2\frac{\partial^2}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^3 \partial \xi^3} \tag{3-23}$$

$$C_1(\xi^1, \xi^3) = \frac{1}{H}\left(1 + \frac{(\xi^1 I)^2}{H}\right), \quad C_2(\xi^3) = \frac{I}{H}, \quad C_3(\xi^3) = \frac{1}{H}\left(\frac{2I^2}{H} - \frac{1}{c^2}\right) \tag{3-24}$$

次に境界条件を考える。$(\xi^1, \xi^3)$ の空間ではわれわれの考える領域は $0 \le \xi^1 \le 1$, $0 \le \xi^3 \le h$ の長方形である。辺，頂点を第3図(b)に示すように，I, II, III, IV, O, A, B, C と名づける。I は中心軸，II は回転双曲面の壁，III, IV は下面，上面に対応する。

§1 に与えた仮定，熱伝導を無視した等の物理的条件によって，各辺において

I: $\quad u = 0, \quad \dfrac{\partial T'}{\partial r} = 0$

II: $\quad v_n = 0, \quad \dfrac{\partial T'}{\partial n} = 0$

III: $\quad w = (-p')^k, \quad T' = \dfrac{1 + w_0}{w + w_0}$

IV: $\quad p' = 0, \quad u = 0$

ここで，$u$ は $r$ 方向の速度成分，$n$ は回転双曲面壁での法線成分をあらわす。これらの条件はただちに斜交座標にほんやくできる：

$$\text{I}: \quad \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{v} = v^1 = \frac{1}{H}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3} = 0 \Rightarrow \Phi = \text{const.} \equiv 0 \qquad (3\text{-}25)$$

$$\mathbf{a}^1 \cdot \operatorname{grad} T' = \frac{\partial T'}{\partial \xi^1} = 0 \qquad (3\text{-}26)$$

$$\text{II}: \quad v^1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3} = 0 \Rightarrow \Phi = \text{const.} \equiv \Phi_{\text{II}} \qquad (3\text{-}27)$$

$$\mathbf{a}^1 \cdot \operatorname{grad} T' = g^{11}\frac{\partial T'}{\partial \xi^1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T'}{\partial \xi^1} = 0 \qquad (3\text{-}28)$$

$$\text{III}: \quad w = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{v} = v^3 = -\frac{1}{H}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1}\right) = (-p')^k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\xi^1 H_{\text{III}}}\frac{\partial}{\partial \xi^1}(\xi^1 \Phi) = -(-p')^k$$

$$\Rightarrow \Phi = -\frac{H_{\text{III}}}{\xi^1}\int_0^{\xi^1} \xi^1 (-p')^k \, d\xi^1, \quad H_{\text{III}} = 1 + h^2/c^2 \qquad (3\text{-}29)$$

$$T' = (1+w_0) / \{(-p')^k + w_0\} \qquad (3\text{-}30)$$

$$\mathrm{IV}: \quad p' = 0 \Rightarrow \quad P = \frac{1}{2A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1}\right)^2 \qquad (3\text{-}31)$$

$$u = 0 \Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3} = 0 \qquad (3\text{-}32)$$

基礎方程式(3-18)~(3-21)は$\Phi, \Omega, T', P$について非線形の連立偏微分方程式である。DはLaplacianに近い演算子で$\Phi$, PはPoisson形の，$\Omega$, $T'$は対流形の偏微分方程式で，各右辺は非齊次項と考えられる。数値計算を行うばあい，右辺は既知として，計算ステップの古い値で代用する。以下，問題を定常としてとりあつかう。

$\Omega$, $T'$の対流形の方程式は解析的には，底部の影響が流れ（特性曲線）にそって伝って行くという構造をしており，したがって，底部より上部に数値計算を行うのが適している。それ故，境界条件として，I, II, III ~~上~~ の値を必要とする。

(3.25)~(3-28)：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3} = \frac{\partial T}{\partial \xi^1} = 0 \qquad \text{on I and II} \qquad \cancel{(3\text{-}33)}$$

をもちいれば，(3-20)，(3-21)は

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1}\right)\frac{\partial \Omega}{\partial \xi^3} = 0 \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1}\right)\frac{\partial T'}{\partial \xi^3} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ on I, II} \qquad (3\text{-}33)$$

となる。(3-15)，(3-17)から$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1} = -Hv^3$となり，I, IIで$v^3 \neq 0$と考えられるから（またH ≠ 0），一般に$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1} \neq 0$ (on I & II)。そこで

$$\Omega = 0, \quad T' = T_{I} \qquad \text{on } I \qquad (3\text{-}34)$$

$$\Omega = \Omega_{II} \quad T' = T_{II} \qquad \text{on } II \qquad (3\text{-}35)$$

とうる。(3-34) の$\Omega=0$は(3-18)からあきらか。

$T'$のIIIにおける境界条件は(3-30)で与えられており、$\Omega$のIIIにおける境界条件をきめる必要がある。III、すなわち充填層直後の流れは

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{W} &= \mathbf{W}_{rot} + \mathbf{W}_{ir} \\ \mathbf{W}_{rot} &= w_1 \mathbf{e}_z \\ \mathrm{rot}\, \mathbf{W}_{ir} &= 0 \qquad \mathbf{W}_{ir}\cdot\mathbf{e}_z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}36)$$

と仮定する。充填層の中の流れは粘性流であり、一般に渦度をもつ流れである。したがって、充填層を通過してきた流れ $w_1 \mathbf{e}_z$ は一般に渦度をもつ。充填層より上の流れは、圧力勾配、浮力等によって起される流れが重畳しているが、この流れは渦なしと仮定してよいであろう。そこでIIIでは

$$\Omega = \xi'\omega = \frac{1}{H_{III}}\left(\frac{\partial v_{rot,1}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial v_{rot,3}}{\partial \xi^1}\right)$$

$$= -\frac{1}{H_{III}}\frac{\partial}{\partial \xi^1}\, a_3\cdot(a^3 w_1) = -\frac{1}{H_{III}}\frac{\partial}{\partial \xi^1}(-p')^k \qquad (3\text{-}37)$$

とうる。

IIの境界条件は、(3-25), (3-27), (3-29), (3-32)で十分である。PのI, II, IIIの境界条件をきめるために運動方程式:

$$-(\mathbf{W}\times\boldsymbol{\omega}) = -A\,\mathrm{grad}\,P + \frac{A}{h}T' a^3 \qquad (3\text{-}38)$$

をもちいる。これはまた

$$-H(-v^3 a^1 + v^1 a^3)\Omega = -A\left(\frac{\partial P}{\partial \xi^1} a^1 + \frac{\partial P}{\partial \xi^3} a^3\right) + \frac{A}{h} T' a^3 \qquad (3\text{-}39)$$

と書ける。I, II においては $\cdot a_3$ を行って，I, II 上で積分し，III においては $\cdot a_1$ を行って III 上で積分して

$$P = P_C + \frac{1}{h} T_I (\xi^3 - h), \quad P_C = \frac{2}{A}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi^1}\right)_C^2 \qquad \text{on I} \qquad (3\text{-}40)$$

$$P = P_B + \frac{1}{h} T_{II} (\xi^3 - h), \quad P_B = \frac{1}{2A}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi^1} + \frac{\Psi}{\xi^1}\right)_B^2 \qquad \text{on II} \qquad (3\text{-}41)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi^3} = \frac{1}{h}\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^3} + \frac{1}{h} T' \qquad \text{on III} \qquad (3\text{-}41)$$

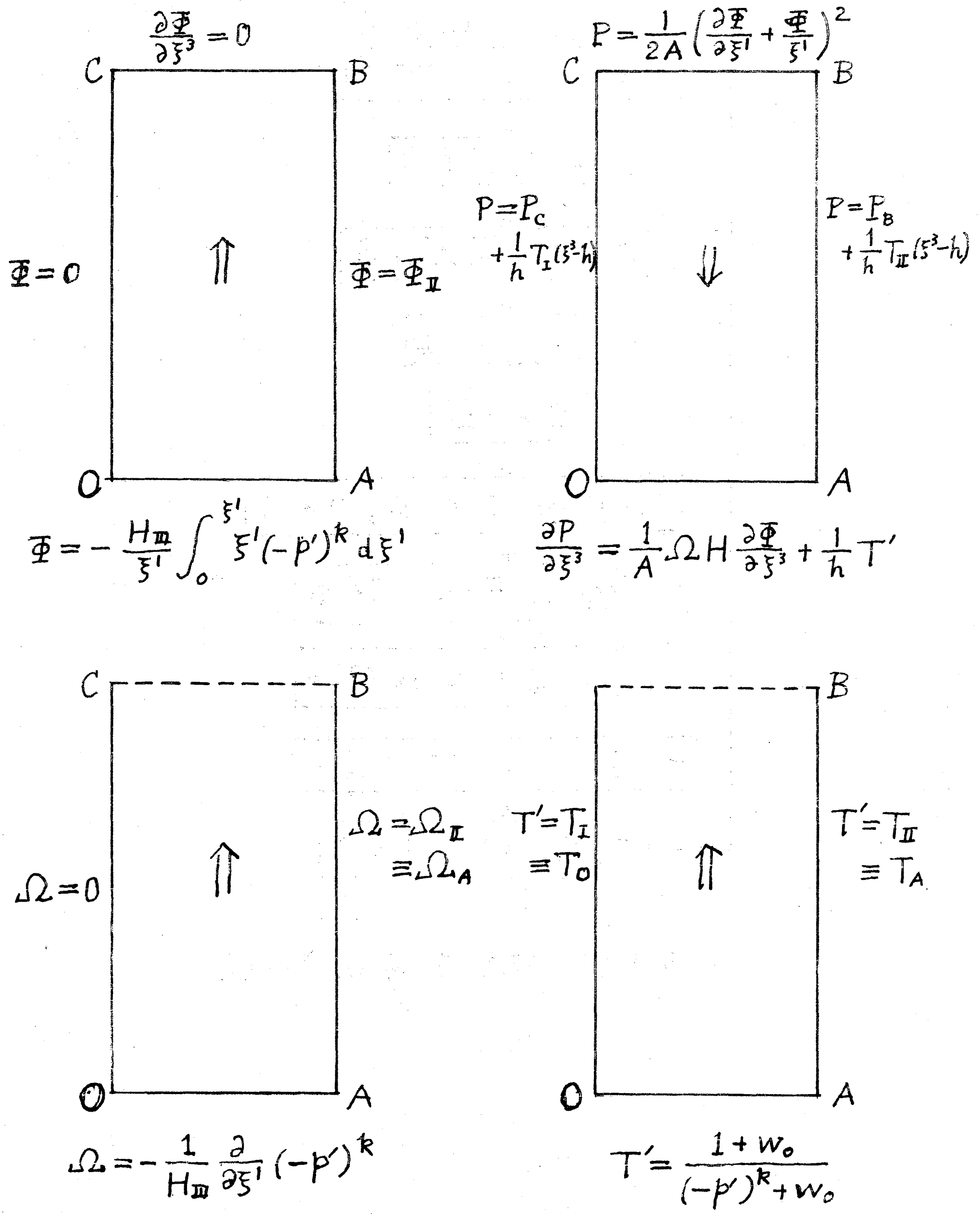
となる。IV の境界条件は (3-31) である。

これらの境界条件を模式的に書くと才4図の如くなる。

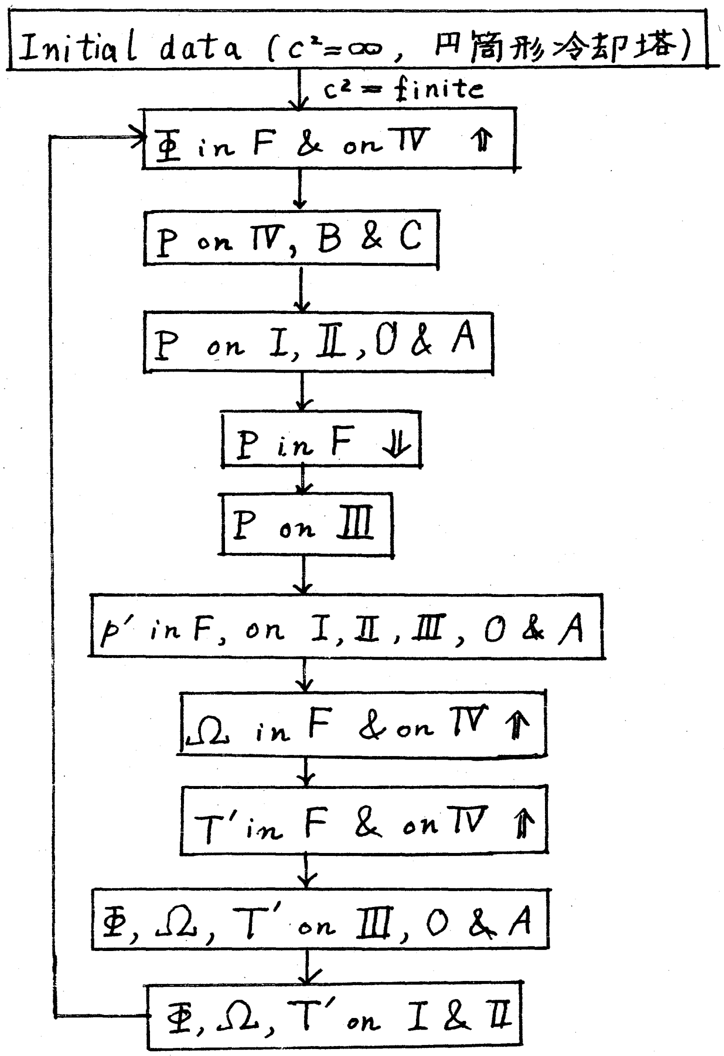
## §4. 数値計算

計算の流れ図は才5図の如くなる。ここで始めの値として円筒形冷却塔のばあいの厳密解をもちい，$c^2$＝有限，すなわち回転双曲面壁の冷却塔のばあいの数値計算を行う。図中 F とあるのは場の中で基礎方程式を差分形にあらためて解くことを意味する。

今までの計算では数値的不安定性があらわれてうまくいかない。その原因は対臨値の処理にあるように思われる。


$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3} = 0$
C B
$\Phi = 0$
$\Phi = \Phi_{II}$
O A
$\Phi = -\frac{H_{III}}{\xi^1} \int_0^{\xi^1} \xi^1 (-p')^k d\xi^1$
$P = \frac{1}{2A} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1} \right)^2$
C B
$P = P_C + \frac{1}{h} T_I (\xi^3 - h)$
$P = P_B + \frac{1}{h} T_{II} (\xi^3 - h)$
O A
$\frac{\partial P}{\partial \xi^3} = \frac{1}{A} \Omega H \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3} + \frac{1}{h} T'$
C B
$\Omega = 0$
$\Omega = \Omega_{II} \equiv \Omega_A$
O A
$\Omega = -\frac{1}{H_{III}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} (-p')^k$
B
$T' = T_I \equiv T_0$
$T' = T_{II} \equiv T_A$
O A
$T' = \frac{1 + w_0}{(-p')^k + w_0}$

第4図　境界条件




第5図 数値計算の流れ図