数理解析研究所講究録
第 336 巻 1978 年 87-100

Sheaves of $\mathcal{B}$-valued structures

早大 理工 高橋 真

D. P. Ellerman は [1] において Sheaves of structures に関して Sheaf forcing を定義して Ultrastalk Theorem を証明し、Ultrastalk が Ultraproduct や Boolean ultrapower の拡張であることを示している。ここでは Sheaves of structures の拡張としての Sheaves of $\mathcal{B}$-structures について考察する。

Def I : top. sp. $\mathcal{B}$: c. B. a. に対し category $\mathcal{O}(I)^{op}$, $M_\mu^{(\mathcal{B})}$ を次の様に定義する.

$\mathcal{O}(I)^{op}$: objects open sets of I

morphisms $V \subset U$ のとき $U \longrightarrow V$ なる morphism が 1 つ

$M_\mu^{(\mathcal{B})}$: objects $\mathcal{B}$-valued structures of type μ

morphisms $\mathcal{B}$- morphisms

[$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$: $\mathcal{B}$-structures に対し $h: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ が $\mathcal{B}$- morphism とは任意の atomic relation $R(x_1, \cdots, x_n)$ と任意の $a_1, \cdots, a_n \in \mathfrak{A}$ に対し]

$$\left\{\begin{array}{l} [\![R(a_1,\cdots,a_n)]\!] \leq [\![R(h(a_1),\cdots,h(a_n))]\!] \\ \text{をみたすこととする} \end{array}\right\}$$

Def　presheaf of $\mathcal{B}$-st. とは $P : \mathcal{O}(I)^{op} \longrightarrow M_\mu^{(\mathcal{B})}$ なる functor である．

これを (I, P) と書く．

$\begin{array}{c} U \\ \downarrow \\ U' \end{array}$ に対し $\begin{array}{c} P(U) \\ \downarrow \\ P(U') \end{array}$ なる morphism を $P^U_{U'}$ と書き restriction map と呼ぶ

Def　(I, P) : presheaf of $\mathcal{B}$-st. とする．

$i \in I$ における P の stalk P_i $(= \varinjlim_{U \ni i} P(U))$ の atomic relation

$R(x_1,\cdots,x_n)$ の値を次の様に定義する．$b_1,\cdots,b_n \in P_i$ とする．

$$[\![R(b_1,\cdots,b_n)]\!]_{P_i} \leqq \bigvee_{U \ni i} \bigvee_{\substack{a_1,\cdots,a_n \in P(U) \\ \text{s.t. } a_k \in b_k\ (1 \leqq k \leqq n)}} [\![R(a_1,\cdots,a_n)]\!]$$

以下 a の i における germ を $[a]_i$，或いは混乱のおそれのないときは単に $[a]$ とかくことにする．

prop 1　$a_1,\cdots,a_n \in P(U_0)$ とする．

$$[\![R([a_1]\cdots[a_n])]\!]_{P_i} = \bigvee_{U_0 \supset U \ni i} [\![R(P^{U_0}_U(a_1),\cdots,P^{U_0}_U(a_n))]\!]$$

∵）$\geqslant$ は $[P^{U_0}_U(a_k)] = [a_k]$ より明らか

$\leqq$ は ${}^\forall c_1,\cdots,c_n \in P(U)$ s.t. $[c_k]=[a_k]$ に対し $U_1,\cdots,U_n \in \mathcal{O}(I)$ s.t. $U_1,\cdots,U_n \subset U \cap U_0$

があって $P^{U_0}_{U_k}(a_k) = P^U_{U_k}(c_k)$　$(1 \leqq k \leqq n)$

よって $U_1 \cap \cdots \cap U_n = U'$ とおくと

$$[\![R(c_1,\cdots,c_n)]\!] \leqq [\![R(P^U_{U'}(c_1),\cdots,P^U_{U'}(c_n))]\!] = [\![R(P^{U_0}_{U'}(a_1),\cdots,P^{U_0}_{U'}(a_n))]\!]$$

$$\therefore \bigvee_{\substack{c_1,\cdots,c_n \in P(U) \\ [c_k]=[a_k]}} [\![R(c_1,\cdots,c_n)]\!] \leqq \bigvee_{U_0 \cap U \supset U' \ni i} [\![R(P^{U_0}_{U'}(a_1),\cdots,P^{U_0}_{U'}(a_1))]\!]$$

$$\leq \bigvee_{u_0 \supset u' \ni i} [\![R(p^{u_0}_{u'}(a_1), \cdots, p^{u_0}_{u'}(a_n))]\!]$$

$$\therefore \bigvee_{u \ni i} \bigvee_{\substack{c_1, \cdots, c_n \in P(u) \\ [c_k] = [a_k]}} [\![R(c_1, \cdots, c_n)]\!] \leq \bigvee_{u_0 \supset u \ni i} [\![R(p^{u_0}_{u}(a_1), \cdots, p^{u_0}_{u}(a_n))]\!]$$

Def (I, P) : presheaf of $\mathcal{B}$-st. が次の (1), (2) をみたすとき

(I, P) を sheaf of $\mathcal{B}$-st. と呼ぶ

(1) $\forall u \in \mathcal{O}(I)^{op}$, $\forall \{u_r\}_{r \in A}$ s.t. open covering of u に対し

$\forall \{a_r\}$ s.t. $a_r \in P(u_r)$, $\forall r, s \in A$ $\quad P^{u_r}_{u_r \cap u_s}(a_r) = P^{u_s}_{u_r \cap u_s}(a_s)$

$\Rightarrow \exists! \, a \in P(u)$ $\forall r \in A$ $\quad P^{u}_{u_r}(a) = a_r$

(2) $\forall u \in \mathcal{O}(I)^{op}$, $\forall \{u_r\}$ s.t. open covering of u, $\forall R(x_1, \cdots, x_n)$: atomic relation

$\forall a_1, \cdots, a_n \in P(u)$

$$[\![R(a_1, \cdots, a_n)]\!] = \bigwedge_{r} [\![R(P^{u}_{u_r}(a_1), \cdots, P^{u}_{u_r}(a_n))]\!]$$

Remark functor $P : \mathcal{O}(I)^{op} \longrightarrow$ Sets が (1) をみたすとき

sheaf of sets と呼ぶ

Def (I, P) : presheaf of $\mathcal{B}$-st. のとき presheaf of sets $(I, {}^nP)$ を

次の様に定義する。

$${}^nP(u) \triangleq P(u)^n$$

$${}^nP^{u}_{u'}(\langle a_1, \cdots, a_n \rangle) \triangleq \langle P^{u}_{u'}(a_1), \cdots, P^{u}_{u'}(a_n) \rangle$$

また 任意の atomic relation $R(x_1, \cdots, x_n)$ と $b \in \mathcal{B}$ に対し

$$R^{b}(u) \triangleq \{\langle a_1, \cdots, a_n \rangle \in {}^nP(u) \mid [\![R(a_1, \cdots, a_n)]\!] \geq b\}$$

$$R^{b\,u}_{\;u'} \triangleq {}^nP^{u}_{u'} \restriction R^{b}(u) \qquad \text{とおくと}$$

(I, R^{b}) は $(I, {}^nP)$ の subpresheaf (graph subpresheaf と呼ぶ)

lemma (I,P): sheaf of sets, (I,R): subpresheaf of (I,P) とする

(I,R) が sheaf になる

$\leftrightarrow \forall U\in \mathcal{O}(I)^{op}\ \forall a\in P(U)\ [\forall i\in U\ \exists U_i\ [i\in U_i\subset U \wedge P^U_{U_i}(a)\in R(U_i)] \to a\in R(U)]$

∵) $(\to)$ $\{U_i\}_{i\in U}$ は U の open covering

$\{P^U_{U_i}(a)\}_{i\in U}$ を考える

$\forall i,j\in U \quad P^{U_i}_{U_i\cap U_j}(P^U_{U_i}(a)) = P^U_{U_i\cap U_j}(a) = P^{U_j}_{U_i\cap U_j}(P^U_{U_j}(a))$

従って (I,R): sheaf より

$\exists!\, b\in R(U)\quad \forall i\in U\quad P^U_{U_i}(b) = P^U_{U_i}(a)$

(I,P): sheaf より $a=b \qquad \therefore\ a\in R(U)$

$(\leftarrow)$ $\forall U\in \mathcal{O}(I)^{op}$, $\forall\{U_r\}$: open covering of U, $\forall\{a_r\}$ s.t. $a_r\in R(U_r)$ に対し

$\forall U_r, U_s \quad R^{U_r}_{U_r\cap U_s}(a_r) = R^{U_s}_{U_r\cap U_s}(a_s)$

$\to \forall U_r, U_s \quad P^{U_r}_{U_r\cap U_s}(a_r) = P^{U_s}_{U_r\cap U_s}(a_s)$

$\to \exists!\, a\in P(U)\quad \forall U_r\ [P^U_{U_r}(a) = a_r] \quad (\because (I,P): \text{sheaf})$

$\to \exists!\, a\in P(U)\ [\forall i\in U\ \exists U_i\ [i\in U_i\subset U\wedge P^U_{U_i}(a)\in R(U_i)] \wedge \forall U_r\ [P^U_{U_r}(a) = a_r]]$

$\to \exists!\, a\in P(U)\ [a\in R(U)\wedge \forall U_r\ [P^U_{U_r}(a) = a_r]]$

$\to \exists!\, a\in R(U)\ \forall U_r\ [R^U_{U_r}(a) = a_r]$

Th.1 (I,P): presheaf of $\mathcal{B}$-set. とするとき、次の (i), (ii) は同値

(i) (I,P): sheaf of $\mathcal{B}$-set.

(ii) (I,P): sheaf of sets であって、任意の atomic relation と任意の $f\in\mathcal{B}$ についての graph subpresheaf が sheaf になること

∵) lemma より

$$\forall U \in \mathcal{O}(I)^{op}\, \forall a_1,\cdots,a_n \in P(U)\,[\forall i \in U\, \exists U_i\, [i \in U_i \subset U \wedge [\![R(P^U_{U_i}(a_1),\cdots,P^U_{U_i}(a_n))]\!] \geq b]$$

$$\rightarrow [\![R(a_1,\cdots,a_n)]\!] \geq b\ ]\ \cdots\cdots (*)$$

と sheaf of $\mathcal{B}$-st. の def の (2) との同値性を言えばよい

(2) → (*)　(*) の前半より $\{U_i\}$ は U の open covering で

$$\forall U_i\quad [\![R(P^U_{U_i}(a_1),\cdots,P^U_{U_i}(a_n))]\!] \geq b$$

$$\therefore\ \bigwedge_i [\![R(P^U_{U_i}(a_1),\cdots,P^U_{U_i}(a_n))]\!] \geq b$$

$$\therefore\ [\![R(a_1,\cdots,a_n)]\!] \geq b \qquad (\because (2))$$

(*) → (2)　(2) において $\bigwedge_r [\![R(P^U_{U_r}(a_1),\cdots,P^U_{U_r}(a_n))]\!] = b$ とおく

従って　$\forall U_r\quad [\![R(P^U_{U_r}(a_1),\cdots,P^U_{U_r}(a_n))]\!] \geq b$

$$\therefore\ \forall i \in U\, \exists U_r\, [i \in U_r \subset U \wedge [\![R(P^U_{U_r}(a_1),\cdots,P^U_{U_r}(a_n))]\!] \geq b]$$

($\because$ $\{U_r\}$ は U の open covering)

$$\therefore\ [\![R(a_1,\cdots,a_n)]\!] \geq b \qquad (\because (*))$$

ところで　$\forall U_r\quad [\![R(a_1,\cdots,a_n)]\!] \leq [\![R(P^U_{U_r}(a_1),\cdots,P^U_{U_r}(a_n))]\!]$

$$\therefore\ [\![R(a_1,\cdots,a_n)]\!] \leq \bigwedge_r [\![R(P^U_{U_r}(a_1),\cdots,P^U_{U_r}(a_n))]\!] = b$$

$$\therefore\ [\![R(a_1,\cdots,a_n)]\!] = b$$

Remark　Th1 より，sheaf of $\mathcal{B}$-st. とは，任意の atomic relation と任意の $b \in \mathcal{B}$ に対し $\forall U \in \mathcal{O}(I)^{op}[\forall b, b' \in \mathcal{B}\, [b \leq b' \rightarrow R^{b'}(U) \subset R^{b}(U)] \wedge R^{0}(U) = {}^{n}P(U)]$ が成り立つような $(I, {}^{n}P)$ の subsheaf (I, R^{b}) が決まっている sheaf of sets のことである．

Def　sheaf of sets (I, Ω) を次の様に定義する

$\Omega(u) \triangleq \{v \mid v \subset u \wedge v \in O(I)^{op}\}$

$\Omega^u_{u'}(v) \triangleq v \wedge u'$

Remark　(I, Ω) は I 上の sheaf of sets 全体の作るトポスの subobject classifier になっている．

Prop 2　(I, P) : sheaf of sets とする

(I, P) の subsheaf と natural transformation $P \to \Omega$ が 1-1 対応する

∵) i) (I, R) : subsheaf of (I, P) に対し $\mathcal{R} : P \to \Omega$ を

$\mathcal{R}_u(a) \triangleq \bigcup\{u' \subset u \mid P^u_{u'}(a) \in R(u')\}$

ii) $\mathcal{R} : P \to \Omega$ に対し (I, R) : subsheaf of (I, P) を

$R(u) \triangleq \{a \in P(u) \mid \mathcal{R}_u(a) = u\}$

と対応させればよい．1-1 対応になっていることは明らか

Def　$\mathfrak{F}$: ultrafilter of $\mathfrak{B}$ とする

$R^{\mathfrak{F}}(u) \triangleq \bigcup_{b \in \mathfrak{F}} R^b(u)$ により定義された sheaf of set $(I, R^{\mathfrak{F}})$ が $(I, {}^nP)$ の subshecf になるとき $\mathfrak{F}$ を P-ultrafilter と呼ぶ

prop 2 より $(I, R^{\mathfrak{F}})$ に対応する nat. trans. が存在するが，それを $\models R^{\mathfrak{F}} : P \to \Omega$ と書く

i.e. $\models R^{\mathfrak{F}}{}_u(a_1, \cdots, a_n) = \bigcup\{u' \subset u \mid [\![R(P^u_{u'}(a_1), \cdots, P^u_{u'}(a_n))]\!] \in \mathfrak{F}\}$

Def (I, P) : sheaf of $\mathcal{B}$-st. が locally invariant とは

$\forall R$: atomic relation $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{O}(I)^{op}$ $\forall i \in \mathcal{U}$ $\exists \mathcal{V} \ni i$ $\forall a_1, \cdots, a_n \in P(\mathcal{U})$

$$[\![R([a_1], \cdots, [a_n])]\!]_{P_i} = [\![R(P^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}(a_1), \cdots, P^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}(a_n))]\!]_{P(\mathcal{V})}$$

をみたすときをいう

Prop 3 (I, P) : locally invariant のとき

$$\models R^{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}(a_1, \cdots, a_n) = \{ i \in \mathcal{U} \mid [\![R([a_1], \cdots, [a_n])]\!]_{P_i} \in \mathcal{F} \}$$

∵) 明らか

Def (I, P) : sheaf of $\mathcal{B}$-st. $\mathcal{F}$: P-ultrafilter

$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$: n-ary formula とする

natural transformation $\Vdash \varphi^{\mathcal{F}} : {}^{n}P \longrightarrow \Omega$ を次の様に定義する

1) φ : atomic $\quad \Vdash \varphi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}(a_1, \cdots, a_n) \stackrel{\leftarrow}{=} \models \varphi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}(a_1, \cdots, a_n)$

2) $\varphi : \psi \vee \chi \quad \Vdash \varphi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}(a_1, \cdots, a_n) \stackrel{\leftarrow}{=} \Vdash \psi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}(a_1, \cdots, a_n) \cup \Vdash \chi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}(a_1, \cdots, a_n)$

3) $\varphi : \psi \wedge \chi \quad \Vdash \varphi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}(a_1, \cdots, a_n) \stackrel{\leftarrow}{=} \Vdash \psi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}(a_1, \cdots, a_n) \cap \Vdash \chi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}(a_1, \cdots, a_n)$

4) $\varphi : \neg \psi \quad \Vdash \varphi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}(a_1, \cdots, a_n) \stackrel{\leftarrow}{=} \mathrm{int}\,(\mathcal{U} - \Vdash \psi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}(a_1, \cdots, a_n))$

5) $\varphi : \exists x \psi \quad \Vdash \varphi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}(a_1, \cdots, a_n) \stackrel{\leftarrow}{=} \bigcup_{\mathcal{V} \subset \mathcal{U}} \bigcup_{a \in P(\mathcal{V})} \Vdash \psi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{V}}(a, P^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}(a_1), \cdots, P^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}(a_n))$

Def (I, P) : sheaf of $\mathcal{B}$-st. $\mathcal{F}$: P-ultrafilter

$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$: n-ary formula とする

$P_i \Vdash^{\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n]) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} i \in \Vdash \varphi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}(a_1, \cdots, a_n)$

$\Vdash^{*} \varphi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}(a_1, \cdots, a_n) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} --(\Vdash \varphi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}(a_1, \cdots, a_n)) \cap \mathcal{U}$ (但し $-\mathcal{V} = \mathrm{int}\,(I - \mathcal{V})$)

$P_i \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n]) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} i \in \Vdash^{*} \varphi^{\mathcal{F}}_{\mathcal{U}}(a_1, \cdots, a_n)$

Def $\quad Pr(I) \triangleq \{F \mid F : \text{prime filter of } O(I)\}$

$Pr(I)$ に $X^\circ(u) = \{F \in Pr(I) \mid F \ni u\}$ $(u \in O(I))$ を base にして

位相を入れる.

prop 4 $\quad \eta : I \longrightarrow Pr(I)$ は continuous

$$\begin{array}{ccl} \eta : I & \longrightarrow & Pr(I) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ i & \longmapsto & F_i = \{u \in O(I) \mid u \ni i\} \end{array}$$

∵) $\eta^{-1}(X^\circ(u)) = u$

Def $\quad$ sheaf of B-set $(Pr(I), P^\circ)$ を次の様に定義する.

但し (I, P) は sheaf of B-set.

for X : open in $Pr(I)$ $\quad P^\circ(X) \triangleq P(\eta^{-1}(X))$

for X, X' : open in $Pr(I)$ s.t. $X' \subset X$ $\quad P^{\circ X}_{X'} \triangleq P^{\eta^{-1}(X)}_{\eta^{-1}(X')}$

Th 2. $\quad (Pr(I), P^\circ)$: locally invariant, $\mathcal{F}$: P-ultrafilter

$a_1, \cdots, a_n \in P(u) = P^\circ(X^\circ(u))$, $F \in X(u)$ とする

$P^\circ_F \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])$ iff $\{i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])\} \in F$

∵) Th を証明する代りに Th と同値な次の等式を証明する.

$\{F \in X^\circ(u) \mid P^\circ_F \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])\} = X^\circ(\{i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])\})$

i) φ : atomic のとき

$(Pr(I), P^\circ)$: locally invariant ならば (I, P) : locally invariant である

から Prop 3 より

$\{i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])\} = --(\Vdash \varphi^{\mathcal{F}}_u(a_1, \cdots, a_n)) \cap u$

$\qquad = --(\{i \in u \mid [\![\varphi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathcal{F}\}) \cap u$

同様に $Pr(I)$ で

$\{F\in X^\circ(u) \mid P^\circ_F \Vdash^{*\mathfrak{F}} \varphi([a_1],\cdots,[a_n])\}$

$= --(\{F\in X^\circ(u)\mid [\![\varphi([a_1],\cdots,[a_n])]\!]\in\mathfrak{F}\}) \cap X^\circ(u)$

$= --(\{F\in X^\circ(u)\mid \exists X\ni F\ [\![\varphi(P^{\circ X(u)}_{X}(a_1),\cdots,P^{\circ X(u)}_{X}(a_n))]\!]\in\mathfrak{F}\})\cap X^\circ(u)$

$= --(\{F\in X^\circ(u)\mid \exists X\ni F\ [\![\varphi(P^{u}_{\pi^{-1}(X)}(a_1),\cdots,P^{u}_{\pi^{-1}(X)}(a_n))]\!]\in\mathfrak{F}\})\cap X^\circ(u)$

$= --(\{F\in X^\circ(u)\mid \exists X\ni F\ \bigwedge_{i\in\pi^{-1}(X)}[\![\varphi([a_1],\cdots,[a_n])]\!]_{P_i}\in\mathfrak{F}\})\cap X^\circ(u)$

$= --(\{F\in X^\circ(u)\mid \exists u\in F\ \bigwedge_{i\in u}[\![\varphi([a_1],\cdots,[a_n])]\!]_{P_i}\in\mathfrak{F}\})\cap X^\circ(u)$

$= --(\{F\in X^\circ(u)\mid \exists u\in F\ \forall i\in u\ [\![\varphi([a_1],\cdots,[a_n])]\!]_{P_i}\in\mathfrak{F}\})\cap X^\circ(u)$

($\because$ $\mathfrak{F}$: P-ultrafilter)

$= --(\{F\in X^\circ(u)\mid \exists u\in F\ \ u=\{i\in u\mid [\![\varphi([a_1],\cdots,[a_n])]\!]\in\mathfrak{F}\}\})\cap X^\circ(u)$

$= --X^\circ(\{i\in u\mid [\![\varphi([a_1],\cdots,[a_n])]\!]\in\mathfrak{F}\})\cap X^\circ(u)$

$= X^\circ(--\{i\in u\mid [\![\varphi([a_1],\cdots,[a_n])]\!]\in\mathfrak{F}\}\cap u)$

$= X^\circ(\{i\in u\mid P_i\Vdash^{*\mathfrak{F}}\varphi([a_1],\cdots,[a_n])\})$

ii) $\varphi=\psi\vee\chi,\ \psi\wedge\chi,\ \neg\psi,\ \exists x\psi$ のときはかんたん

([1] の prime stalk Theorem と同様)

Th 3 $(Pr(I), P^\circ)$: locally invariant, $\mathfrak{F}$: P-ultrafilter

$F^\circ\in X^\circ(u)$: max-filter, $P^\circ_{F^\circ}$ で Maximum Principle が

成り立つとする.

$P^\circ_{F^\circ}/\mathfrak{F}\models\varphi([a_1]_{\mathfrak{F}},\cdots,[a_n]_{\mathfrak{F}}) \Longleftrightarrow P^\circ_{F^\circ}\Vdash^{*\mathfrak{F}}\varphi([a_1],\cdots,[a_n])$

i) φ : atomic のとき

$P^\circ_{F^\circ}/\mathfrak{F}\models\varphi([a_1]_{\mathfrak{F}},\cdots,[a_n]_{\mathfrak{F}}) \Leftrightarrow [\![\varphi([a_1],\cdots,[a_n])]\!]\in\mathfrak{F}$

$\Leftrightarrow \exists v\in F^\circ\ [\![\varphi(P^u_v(a_1),\cdots,P^u_v(a_n))]\!]\in\mathfrak{F}$

$\Leftrightarrow \exists v \in F^{\circ}\ \forall i \in v\ [\![\varphi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathfrak{F}$

$\Leftrightarrow \exists v \in F^{\circ}\ \ v = \{ i \in v \mid [\![\varphi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathfrak{F} \}$

$\Leftrightarrow \{ i \in u \mid [\![\varphi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathfrak{F} \} \in F^{\circ}$

$\Leftrightarrow \cdots \{ i \in u \mid [\![\varphi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathfrak{F} \} \cap u \in F^{\circ}$

$\Leftrightarrow \{ i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathfrak{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n]) \} \in F^{\circ}$

$\Leftrightarrow P^{\circ}_{F^{\circ}} \Vdash^{*\mathfrak{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])$

ii) $\varphi = \psi \vee \chi$ のとき

$P^{\circ}_{F^{\circ}}/\mathfrak{F} \models \varphi([a_1]_{\mathfrak{F}}, \cdots, [a_n]_{\mathfrak{F}}) \Leftrightarrow [\![\varphi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathfrak{F}$

$\Leftrightarrow [\![\psi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathfrak{F}$ or $[\![\chi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathfrak{F}$

$\Leftrightarrow P^{\circ}_{F^{\circ}} \Vdash^{*\mathfrak{F}} \psi(\cdots)$ or $P^{\circ}_{F^{\circ}} \Vdash^{*\mathfrak{F}} \chi(\cdots)$

$\Leftrightarrow \{ i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathfrak{F}} \psi(\cdots) \vee \chi(\cdots) \} \in F^{\circ}$

$\Leftrightarrow P^{\circ}_{F^{\circ}} \Vdash^{*\mathfrak{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])$

iii) $\varphi = \psi \wedge \chi$ のとき

$\psi \vee \chi$ のときと同様

iv) $\varphi = \neg \psi$ のとき

$[\![\varphi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathfrak{F} \Leftrightarrow [\![\psi([a_1], \cdots, [a_n])]\!] \notin \mathfrak{F}$

$\Leftrightarrow$ not $P^{\circ}_{F^{\circ}} \Vdash^{*\mathfrak{F}} \psi(\cdots)$

$\Leftrightarrow \{ i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathfrak{F}} \psi(\cdots) \} \notin F^{\circ}$

$\Leftrightarrow \{ i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathfrak{F}} \neg\psi(\cdots) \} \in F^{\circ}$

$\Leftrightarrow P^{\circ}_{F^{\circ}} \Vdash^{*\mathfrak{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])$

v) $\varphi = \exists x \psi$ のとき

$$[\![\exists x \psi(x, [a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists v \exists a_0 \in P(v) [\![\psi([a_0], [a_1], \cdots, [a_n])]\!] \in \mathcal{F}$$

$$\Leftrightarrow \exists v \exists a_0 \in P(v) \exists v' [\![\psi(P^u_{v'}(a_0), P^u_{v'}(a_1), \cdots)]\!] \in \mathcal{F}$$

$$\Leftrightarrow \exists v \exists a \in P(v) [\![\psi(a, P^u_v(a_1), \cdots, P^u_v(a_n))]\!] \in \mathcal{F}$$

$$\Leftrightarrow \exists v \exists a \in P(v)\ P^c_{F^c} \Vdash^{*\mathcal{F}} \psi(a, \cdots)$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \bigcup_{v \subset u} \bigcup_{a \in P(v)} \{ i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathcal{F}} \psi(a, \cdots) \} \in F^c$$

$$\Leftrightarrow \{ i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathcal{F}} \exists x \psi(x, \cdots) \} \in F^c$$

$$\Leftrightarrow P^c_{F^c} \Vdash^{*\mathcal{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n])$$

((*) は [1] 参照)

Def $\mathcal{U}lt(I) \triangleq \{ F \mid F :$ ultrafilter of $Reg(I) \}$ (但し $Reg(I)$ は regular open set 全体)

$\mathcal{U}lt(I)$ に $X^*(u) \triangleq \{ F \in \mathcal{U}lt(I) \mid F \ni u \}$ (但し $u \in Reg(I)$) を base にして位相を入れる.

(I, P) : sheaf of $\mathcal{B}$-st. のとき

presheaf of $\mathcal{B}$-st $(\mathcal{U}lt(I), P^*)$ を次の様に定義する

$$P^*(X^*(u)) \triangleq \varinjlim_{v \subset_d u} P(v) \qquad (\text{但し } C_d \text{ は dense subset のこと})$$

$P^{*\,X^*(u)}_{\ X^*(u')}$ の定義は [1] 参照

for $b_1, \cdots, b_n \in P^*(X^*(u))$

$$[\![R(b_1, \cdots, b_n)]\!] \triangleq \bigvee_{v \subset_d u} \bigvee_{\substack{c_1, \cdots, c_n \in P(v) \\ P^{*u}(c_k) = b_k}} [\![R(c_1, \cdots, c_n)]\!]$$

for X : open in $\mathcal{U}lt(I)$ $\quad P^*(X) \triangleq \varprojlim_{\substack{X' \in B \\ X' \subset X}} P^*(X')$ 但し B は basis for $b_1, \cdots, b_n \in p^*(X)$

$$[\![R(b_1, \cdots, b_n)]\!] \leq \bigwedge_{\substack{X' \in B \\ X' \subset X}} [\![R(p^{*X}_{X'}(b_1), \cdots, p^{*X}_{X'}(b_n))]\!]$$

Remark $(\mho H(I), p^*)$ は一般に sheaf of B-st. にはならないが sheaf of sets ではある. ([1] 参照)

prop5 $\mathcal{O}(I)$ の max-filter と $Reg(I)$ の ultrafilter は 1-1 対応する.

∵) $F \in \mho H(I)$ に対し $F^\circ = \{u \in \mathcal{O}(I) \mid --u \in F\}$ を

F : max に対し $F^* = \{--u \in Reg(I) \mid u \in F\}$ を

対応させればよい. 1-1 対応は明らか

Prop 6 (I, P) : sheaf of B-st.

$F \in \mho H(I)$, F° : F に対応する max-filter とする

$P^\circ_{F^\circ} \cong P^*_F$

∵) 集合としての同型は [1] 参照

同型写像を Θ とする.

$b_1, \cdots, b_n \in P^\circ_{F^\circ}$ に対し

$$[\![R(b_1, \cdots, b_n)]\!]_{P^\circ_{F^\circ}} = \bigvee_{X \ni F^\circ} \bigvee_{\substack{c_1, \cdots, c_n \in P^\circ(X) \\ p^{\circ X}(c_k) = b_k}} [\![R(c_1, \cdots, c_n)]\!]_{P^\circ(X)}$$

$$= \bigvee_{u \in F^\circ} \bigvee_{\substack{c_1, \cdots, c_n \in P(u) \\ p^{\circ X(u)}(c_k) = b_k}} [\![R(c_1, \cdots, c_n)]\!]_{P(u)}$$

$$= \bigvee_{--u \in F} \bigvee_{v \subset --u} \bigvee_{\substack{c_1, \cdots, c_n \in P(v) \\ p^{\circ X(v)}(c_k) = b_k}} [\![R(c_1, \cdots, c_n)]\!]_{P(v)}$$

$$= \bigvee_{\cdots u \in F} \bigvee_{v \subset \cdots u} \bigvee_{\substack{c_1, \cdots, c_n \in P(v) \\ \theta(p^{X(v)}(c_k)) = \theta(b_k)}} [\![R(c_1, \cdots, c_n)]\!]_{P(v)}$$

$$= \bigvee_{\cdots u \in F} \bigvee_{v \subset \cdots u} \bigvee_{\substack{c_1, \cdots, c_n \in P(v) \\ p^{*}X^{*}(\cdots u)(p'^{v}(c_k)) = \theta(b_k)}} [\![R(c_1, \cdots, c_n)]\!]_{P(v)}$$

(但し $p'^{v} : P(v) \longrightarrow \varinjlim_{v \subset \cdots u} P(v)$)

$$= \bigvee_{\cdots u \in F} \bigvee_{\substack{d_1, \cdots, d_n \in p^*(X^*(\cdots u)) \\ p^{*}X^{*}(\cdots u)(d_k) = \theta(b_k)}} [\![R(d_1, \cdots, d_n)]\!]_{p^*(X^*(\cdots u))}$$

$$= [\![R(\theta(b_1), \cdots, \theta(b_n))]\!]_{P^*_F}$$

Th4 $(P_r(I), P^\circ)$: locally invariant. $\mathfrak{F}$: P-ultrafilter

$F^\circ \in X(u)$: max-filter, $P^\circ_{F^\circ}$ で maximum principle が成り立つ

とする. F を F° に対応する ultrafilter とする.

$P^*_F/\mathfrak{F} \models \varphi([a_1]_{\mathfrak{F}}, \cdots, [a_n]_{\mathfrak{F}}) \Longleftrightarrow \cdots \{ i \in u \mid P_i \Vdash^{*\mathfrak{F}} \varphi([a_1], \cdots, [a_n]) \} \in F^\circ$

∵) Th3 と prop 6 より明らか

Cor (Ultrastalk Theorem) [Ellerman]

(I, P): sheaf of st. $F \in \mathrm{Ult}(I)$, F°: F に対応する max-filter とする

$P^*_F \models \varphi([a_1], \cdots, [a_n])$ iff $\{ i \in u \mid P_i \Vdash^* \varphi([a_1], \cdots, [a_n]) \} \in F$

∵) $\mathcal{B} = \mathfrak{Q}$ とすればよい. Th4 の仮定をみたすことは

明らか

($\Vdash^*$ は $\Vdash^{*\{I\}}$ と同値. $\mathcal{B} = \mathfrak{Q}$ のとき $\mathfrak{F} = \{I\}$ である)

参考文献

[1] D. P. Ellerman   Sheaves of Structure and Generalized ultraproduct
Ann. Math. Logic 7 (1974) 163～195

[2] F. W. Lawvere   Quntifiers and sheaves
Actes, Congrès intern. math. 1970, Tome 1, 329～334

[3] H. Volger   Ultrafilters, ultrapowers and finiteness in a topos
J. Pure Appl. Algebra 6 (1975) 345～356