数理解析研究所講究録
第336巻 1978年 126-134

完備ブール代数値の解析学

名大 教養部 難波完爾

1963年にP. J. Cohenによって，例えば，連続体仮説

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

が集合論の公理ZFC[1)]より独立であることが示されて以来．そこで用いられた"forcing"の概念の代数的，位相的そして比較的最近にはsheafやcategoryによる意味ずけが成されるようになっている．

1) ZFCの公理系

(1) Extensionality $\forall x \in a (x \in b), \forall x \in b (x \in a) \to a = b$

(2) Unorderd pair $\exists c \forall x (x \in c \equiv x = a \vee x = b)$

(3) Sum set $\exists b \forall x (x \in b \equiv \exists y \in a (x \in y))$

(4) Power set $\exists b \forall x (x \in b \equiv \forall y \in x (y \in a))$

(5) Empty set $\forall x (\neg x \in 0)$

(6) Infinity $\exists a (0 \in a \wedge \forall x \in a (x+1 \in a))$

(7) Comprehension $\exists b \forall x (x \in b \equiv x \in a \wedge P(x))$

(8) Replacement $\forall x \in a \exists y P(x,y) \equiv \exists y \forall x \in a \exists z \in y P(x,z)$

(9) Induction; Foundation $\forall x (\forall y \in x P(y) \to P(x)) \to \forall x P(x)$

(10) Axiom of Choice $\forall x \in a \exists y P(x,y) \equiv \exists y \forall x \in a P(x, y(x))$

さて，D. Scott 及び R. M. Solovay は集合の全体 V の中に完備ブール代数 $\mathcal{B}$ の中に値を有する集合論 ZFC のモデルを定義した．即ち $V^{(\mathcal{B})}$ は $\mathcal{B}$ の元を値に有する函数の族であって，次の帰納法によって定義されたものである．即ち

$$u \in V^{(\mathcal{B})} \equiv u ; V^{(\mathcal{B})} \longrightarrow \mathcal{B}$$

そして，$u \in v$ 及び $u = v$ の値は次のような帰納法で定められている．

$$|u \in v| = \sum_{x \in dom(v)} v(x) \, |x = u|$$

$$|u = v| = \prod_{x \in dom(u)} \left(u(x) \Rightarrow |x \in v| \right) \prod_{x \in dom(v)} \left(v(x) \Rightarrow |x \in u| \right)$$

この体系の中では勿論，等号に関する公理

$$u_1 = v_1 , \cdots , u_n = v_n , A(u_1, \cdots, u_n) \longrightarrow A(v_1, \cdots, v_n)$$

は成立する．即ち不等式

$$|u_1 = v_1| \cdot \cdots \cdot |u_n = v_n| \cdot |A(u_1, \cdots, u_n)| \leq |A(v_1, \cdots, v_n)|$$

が $\mathcal{B}$ の中で成立する．

又，束縛記号としては，$\exists x \in a$ とか $\forall x \in a$ のようなもののみより構成されているものを bounded formula と呼ぶのであるが，これらの性質は absolute である．

即ち $B_1 \overset{c}{\subset} B_2$ を完備な inclusion とするとき，これから自然に $\tau : V^{(B_1)} \longrightarrow V^{(B_2)}$ が定義されるが，それは次のようにして導入される

$$dom(iu) = \{ix \mid x \in dom(u)\}$$
$$iu(ix) = i(u(x))$$

上で absolute といったのは

$$i(|A(u_1, \cdots, u_n)|) = |A(i(u_1), \cdots, i(u_n))|$$

という可換性が成立するという意味である．例えば順序数の概念などは，このようなもの丶例である．即ち

$$\forall x \in a \forall y \in x (y \in a) \wedge \forall x \in a \forall y \in x \forall z \in y (z \in x)$$

又，Gödel の定義では

$$\forall x \in a \forall y \in x (y \in a) \wedge \forall x, y \in a (x \in y \vee x = y \vee y \in x)$$

であるが，いずれにしても bounded である．このようにして自然数とか有理数Q等は absolute であるが，勿論実数の概念は absolute ではない．

これらの概念をより見易くする為に $V^{(B)}$ の中での位相空間の完備化について見よう．

今 (Y, d) を完備な距離空間とする．この空間は $V^{(B)}$ の中でも距離空間 $(\check{Y}, \check{d})$ と考えられる．ここに $\vee$ は $2 \subset B$ より自然に生ずる対応

$$\vee : V^{(2)} = V \longrightarrow V^{(B)}$$

である．次に B の双対空間，即ち $h : B \longrightarrow 2 = \{0, 1\}$ の全体，又は maximal idial の全体，に $U(a) = \{h \mid h(a) = 1\}$ を開集合の基として位相を入れたものを考え，それを B^* とする．よく知

られている通り B は B^* の中の clopen set の全体と同型であるし，又 B^* の regular open set の作る完備ブール代数は勿論 B と同型である．

さて $\check{Y}$ の元は Y を添字集合とする 1 の分解として表現できるのであるから，これは B^* 上では，その clopen set の和である dense open set で定義された階段函数と考えられる．即ち

$$|u \in \check{Y}| = \sum_{y \in Y} |u = \check{y}|$$

が 1 の分解を与え，$|u = \check{y}| \subset B^*$ の clopen set と考えて，そこで y をとらせる函数 $f_u(x)\,;\ X = B^* \longrightarrow Y$ が自然に対応している．勿論これは階段函数であって，一般にはその定義域は dense であるが全集合 B^* ではない．しかし Y が compact であれば B^* 上の連続函数に自然に，一意的に拡大できる．

それは $x \in B^*$ に対して

$$\mathfrak{F}_x = \{A \subset Y \mid x(\sum_{y \in A} |u = \check{y}|) = 1\}$$

を考えれば，それは Y 上の ultrafilter であり

$$\bigcup_{y \in Y} |u = \check{y}|$$

の元は principal なものに，他のものは non-principal なものに対応している．したがって Y の compactness によって $\mathfrak{F}_x$ の元の閉包の全体は 1 点に収束する．よって，その値を $f_u(x)$ とすれば，

$$f_u : B^* \longrightarrow Y$$

は全体で定義された連続函数である．

特にYを距離空間と考えたので，Yの完備化は$\check{Y}$のCauthy列によって定められる．$\check{Y}$の元は連続函数で与えられるので，$V^{(B)}$の中で部分列を考えることによって，連続函数の列

$$f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n,\ \cdots$$

で，次の条件；$m \geq n$なら

$$d(f_m(x),\ f_n(x)) < \frac{1}{2^n}$$

とすることが出来る．よって連続函数列の一様収束極限として一つの連続函数を得る　又一つの連続ス函数に対しては，ほとんど到るところ定義された階段函数で

$$d(f(x)\ f_n(x)) < \frac{1}{n}$$

なるものを得るので，$f: B^* \longrightarrow Y$なる連続函数の全体が$\check{Y}$の完備化である．

可分性等を仮定しない一般のcompact空間Yの完備化に対して連続函数の全体が丁度$\check{Y}$のcompact化となる為の条件については今は完全には知らない．

Hilbert空間でのスペクトル表示と実数の関係

HをHilbert空間とし，$\mathcal{B}$をその互に交換可能な射影子より成る完備ブール代数とする．$\mathcal{B}$のoperationは勿論

$a \cdot b$	$A\,B$
$a + b$	$A + B - AB$
$-a$	$1 - A$

であり $\prod A_\nu$ は閉部分空間

$$\{x\in H \mid \forall\nu\in\Lambda\,(A_\nu x = x)\}$$

への射影子である．$V^{(B)}$ の中の実数は Dedekind cut によって定められるので

$$f : R \longrightarrow B$$

なる順序を保つ写像が一つの実数を定めている．即ち

$$\lambda \longmapsto E(\lambda)$$

は 1 の分解であって，通常，積分での表示を用いて

$$E = \int \lambda\, dE(\lambda)$$

と記しているのである．これが spectral 表示であるが，H 自身は一つの完備な距離空間であるから，一つの実数は又 B^* の上の一つの連続函数と考えられ，そのスペクトルが有界のときに限り全集合で定義された連続函数になるのである．

これらのことは次のように Normed ring の Gelfand 表現としてよく知られているところである．即ち

A を体 F 上の線型空間で次の性質

$$x(yz) = (xy)z \qquad x, y, z \in A$$

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$\alpha\beta(xy) = (\alpha x)(\beta y) \qquad \alpha, \beta \in F$$

を有するとき algebra 又は ring と呼ばれ

$$xy = yx \quad ;$$

のときは commutative algebra と呼ばれる．又それが Banach 空間であって

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

を満足するとき Banach algebra という．さらに A が単位元を有し $\|e\| = 1$，commutative であるときは normed ring と呼ばれる．

B を normed ring とし B^* をその maximal ideal の全体のなす空間とすれば，B は B^* 上の有界連続函数として表現される．即ち normed ring も $V^{(B^*)}$ の実数の一つの表現なのである．

次に関係を一般的に記述する為に，基数による自然な分解についてふれておこう．即ち u を $V^{(B)}$ の中の集合とすればその $V^{(B)}$ の中での基数を考えることによって

$$\sum_{\alpha} |\bar{\bar{u}} = \check{\aleph}_\alpha| = 1$$

である．したがって確率，可能性 $|\bar{\bar{u}} = \check{\aleph}_\alpha|$ で u は基数 $\aleph_\alpha$ を有する．又 v を u 上の二項関係とするとき，即ち

$$|v \subset u \times u| = 1$$

とすれば，u と $\aleph_\alpha$ の1対1写像を用いて

$$v(\gamma, \tau) = |(t(\check{\gamma})\ t(\check{\tau})) \in v| \cdot |\bar{\bar{u}} = \aleph_\alpha|$$

は $\aleph_\alpha$ 型の正方行列である．ここでしばらくこのような正方行列の固有値とか固有ベクトルの意味について考えてみよう．

今 A を正方行列として方程式

$$Au = \lambda u$$

を考えuの長さ，即ち$\sum u(x) = 1$，を考えよう．これは勿論$|\exists x \in u| = |u \neq \phi| = 1$を意味している．又，上記方程式の意味は

$$|\exists x \in u((y\,x) \in A) \equiv y \in u| = \lambda$$

即ち，可能性λでuは演算Aの下での*fixed set*であることを意味している．

次にA^nを行列の乗法にしたがって定義すれば

$$(y\,x) \in A^n \equiv \exists x_1 \cdots \exists x_{n-1}((y\,x_1) \in A \wedge \cdots \wedge (x_{n-1}x) \in A)$$

次のようにして導入された関係

$$x \leq_A y \equiv \exists n \in \omega((y\,x) \in A^n)$$

勿論$A^0 \ni (x\,y) \equiv x = y$の意味とする．このとき

$$|\forall y \in u\, \exists x \in u\, (y\,x) \in A| \geq \lambda$$

は可能性λでuは最初の元を含んでないことを意味し

$$|\forall y \forall x \in u((y\,x) \in A \rightarrow y \in u)| \geq \lambda$$

はuが関係$\leq_A$で閉じていることを意味する．

それ故もしXの中に無限増加列があれば，自明でない固有空間を有することが示される．即ち

$$|\,p_1 <_A p_2 < \cdots < p_n < \cdots\,| = \lambda$$

とするとその和として

$$|x \in u| = |\exists n \in \omega(p_n > x)|$$

これはλに応ずる固有値の一つである．即ち

$$Au = \lambda u$$

又，X が $\leq_A$ に対して整列又は無限上昇列がなくて $x <_A x$ をることがなければ，A は 0 以外の固有空間をもたないことは容易であろう．

A が unitary のとき，即ち $A: X \longrightarrow X$ の 1 対 1 onto の場合はその固有ベクトルは A による orbit の互に素なものゝ和である．これは $(1, 2, \cdots, n)$ の置換が必ず互に素な巡回置換の積に分解できることゝ同様であって Boolean valued のときは，2 値の部分集合とも有限集合とも異なる場合があることを意味している．

A が対称行列のときは，A の固有ベクトルは連結成分のことである．

これらの概念は Boolean algebra を値にもつ行列についてであるが，例えば measurable set から生ずる完備ブール代数等のようなものでは

$$\mu : \mathcal{B} \longrightarrow R$$

のような自然な写像が考えられるので，これらの概念と，線型空間の作用素の固有空間，固有値の間には自然な対応があるのであろうが今のところ自分ははっきり認識している訳でないが，いくらか時間がかゝっても理解すべく努力しようと思っている．