数理解析研究所講究録
第337巻1978年1-16

波動方程式の解のExponential Decayについて

大阪大学理学部　井川　満

§1. はじめに。　$\mathcal{O}$を$\mathbb{R}^3$の中の有界な障害物で、その境界Γは十分に滑かであるとする。$\mathcal{O}$の外部領域における波動方程式の解のExponential decayの考察は境界条件がDirichlet条件あるいはNeumann条件、さらに才3種境界条件を課した場合に対してなされて来たように思われる。そして、Dirichlet境界条件以外の場合にはあまり多くの仕事がないようである。例えば、Morawetz [11]は$\mathcal{O}$がconvexである場合、Neumann条件に対して考察しており、Tokita [13]は$\mathcal{O}=\{x;\ |x|<1\}$の場合に才3種境界条件に対して解のExponential decayを示しているのみのように思われる。

今回ここで示そうと思う事は次のようである。$\mathcal{O}$に関してはMorawetz [11]が置いたよりも強い条件、$\mathcal{O}$がstrictly convexという条件を課す代りに、極めて一般な境界条件のもとで、解のExponential decayを示す。

$\Omega=\mathbb{R}^3-\mathcal{O}-\Gamma$ とおく。

$$B = \sum_{j=1}^{3} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + c(x)\frac{\partial}{\partial t} + d(x)$$

をΓの近傍で定義されたC^∞な係数をもつ1階の微分作用素とする。我々は次の仮定をおく。

(A-I)　ΓのGauss曲率は strictly positive.

(A-II)　$b_j(x)$, $j=1,2,3$ 及び $c(x)$ は実数値函数

(A-III)　$\sum_{j=1}^{3} b_j(x) n_j(x) = 1$　　on Γ

ここで $n(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ は $x \in \Gamma$ におけるΓの単位外法線とする、外とはΘについてである。

以上の仮定のもとで混合問題

$$(\mathrm{P})\quad \begin{cases} \square u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ Bu = 0 & \text{on } \Gamma \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \end{cases}$$

はC^∞の意味で well posed である必要十分条件は

(A-IV)　$c(x) < 1$　　for all $x \in \Gamma$

が成り立つことである。

仮定 A-I～IVのもとで(P)の解の $t\to\infty$ での振舞に関しては, $\mathrm{Re}\,(-d(x))$ がある程度大きければ $u(x,t)$ は $t\to\infty$ の時 Exponential に decay する、すなわち

定理1. d_0 はある定まった数で.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial(b_j(x)-n_j(x))}{\partial x_j}-d(x)\right)\geqq d_0$$

が成り立っているとしよう。u_0, u_1 を compatibility 条件をみたしかつ

$$\bigcup_{j=0}^{1}\operatorname{supp} u_j\subset\{x;\ x\in\overline{\Omega},\ |x|\leqq r\}$$

が成り立つような初期dataとする。そのとき(P)の解 $u(x,t)$ は

$$E_1(u,r_0,t)\leqq\frac{C}{\varepsilon}\exp\{3\delta_0(r_0+2r)\}$$

$$\cdot\exp\{-2(\delta_0-\varepsilon)t\}E_3(u,\infty,0),\ \forall t\geqq 0$$

が成り立つ。ただし $\delta_0=12\rho^{-1}e^{-1}$, $\rho=\mathcal{O}$の直径, εは任意の正の数である. そして

$$E_m(u,r_0,t)=\sum_{|\gamma|\leqq m}\int_{\Omega\cap\{|x|\leqq r_0\}}|D_{x,t}^{\gamma}u(x,t)|^2\,dx.$$

又 $b(x)=n(x)$, $c(x)=0$, すなわち第三種条件の場合は $d(x)$ に関する条件がより詳しくわかる.

<u>定理2.</u>
$$B=\frac{\partial}{\partial n}+\sigma(x),\qquad \sigma\in C^\infty(\Gamma)$$

としよう。$M>0$ に対して $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ なる定数がとれて、

$$|\mathrm{Im}\ \sigma(x)|\le\delta_1,\qquad -M\le \mathrm{Re}\ \sigma(x)\le\delta_1\quad \forall x\in\Gamma$$

が成り立つならば、compatibility 条件と

$$\bigcup_{j=0}^{1}\operatorname{supp} u_j\subset\{x\,;\,x\in\overline{\Omega},\ |x|\le\kappa\}$$

を満たす初期値 u_0, u_1 に対しての (P) の解 $u(x,t)$ は

$$E_1(u,x_0,t)\le C\cdot\exp\{3\delta_0(x_0+2\kappa)\}\cdot\exp(-\delta_2 t)\cdot E_3(u,\infty,0),\qquad \forall t\ge 0$$

が成り立つ。

ここで我々が注意しておきたいことは混合問題 (P) は必ずしも L^2 well posed な問題ではないことである。実際

$$(1.1)\qquad -\Big(\sum_{j=1}^{3}(b_j(x)-n_j(x))^2\Big)^{1/2}<c(x)$$

となる点が Γ 上に少くとも一点あれば (P) は L^2 well posed ではない事がわかっている。(たとえば [1], [8] を見よ。) 故に定理1の主張する所は全体の energy はどのように増大して

も有限な領域上の energy は Exponential に decay するという事である。

この結果の証明の方法は問題を Dirichlet 条件をもった問題に帰着させる [5], [6] の方法による。

§2. 問題の帰着. 今 $\tilde{u}_j(x)$, $j=0,1$ を $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ の函数で

$$\tilde{u}_j(x) = u_j(x) \quad , \quad \forall\ x \in \Omega$$

が成り立っているものとしよう。$F(x,t)$ を Cauchy 問題

$$\begin{cases} \Box F(x,t) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ F(x,0) = \tilde{u}_0(x) & \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}(x,0) = \tilde{u}_1(x) & \end{cases}$$

の解としよう。

$$w(x,t) = \begin{cases} u(x,t) - F(x,t) & \text{for } (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ 0 & \text{for } (x,t) \in \Omega \times (-\infty,0) \end{cases}$$

とおくと $w(x,t)$ は

$$(P_0) \qquad \begin{cases} \Box w(x,t) = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^1 \\ Bw(x,t) = h(x,t) & \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}^1 \\ \operatorname{supp} w \subset \bar{\Omega} \times [0,\infty) & \end{cases}$$

を満たしている。ここで $h(x,t) = BF(x,t)\big|_\Gamma$.

u_0, u_1 が compatibility 条件を満たしている事より

$$h(x,t) \in C^\infty(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$$

が従う。又 Huygens の原理より

$$\text{(2.1)} \qquad \operatorname{supp} h(x,t) \subset \Gamma \times [0, 2\kappa]$$

が成り立つ。$F(x,t)$ の振舞は容易に知ることが出来るので (2.1) を満たす $h(x,t)$ に対する (P_0) の解の $t \to \infty$ での振舞を調べれば十分である。

$\mathbb{R}^3$ の原点は $\mathcal{O}$ の中に含まれているとする。$\delta > 0$ として

$$\Delta_\delta = \Delta + 2\delta \frac{\partial}{\partial |x|} + \delta^2 + \frac{2\delta}{|x|}$$

$$B^{(\delta)} = B + \delta \frac{1}{|x|} \sum_{j=1}^{3} \ell_j(x) x_j$$

とおう。そうすると明らかに $u(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^1)$ に対し

$$e^{-\delta|x|} \Box u(x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_\delta\right)(e^{-\delta|x|} u)$$

$$e^{-\delta|x|} B u(x,t) = B^{(\delta)}(e^{-\delta|x|} u)$$

が成り立つ。(P_0) の解 $w(x,t)$ に対し

$$v(x,t) = e^{-\delta|x|} w(x,t)$$

とおくと $v(x,t)$ は

$$(P_\delta) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_\delta\right) v(x,t) = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^1 \\ B^{(\delta)} v(x,t) = e^{-\delta|x|} h(x,t) & \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}^1 \\ \operatorname{supp} v \subset \overline{\Omega} \times [0, \infty) \end{cases}$$

を満たしている。よって（P_0）の解の decay を調べる代りに（P_δ）の解 $v(x,t)$ の decay を調べれば良いことがわかる。$p\in\mathbb{C}$ を parameter にもつ boundary value problem

$$
(2.2)\quad \begin{cases} (p^2-\Delta_\delta)u(x)=0 & \text{in } \Omega \\ u(x)=g(x) & \text{on } \Gamma \end{cases}
$$

を考えよう。ある $\mu_0>0$ があって $\mathrm{Re}\,p\geqq\mu_0$ ならば任意の $g(x)\in H^m(\Gamma)$ に対して (2.2) の解 $u(x)\in H^m(\Omega)$ が一意的に存在することがわかっている。これを $U^{(\delta)}(p,g;x)$ と記そう。Morawetz [10] の結果を用いると $U^{(\delta)}$ について次の定理を得る。この証明は略す。

定理 2.1. $\delta\geqq\delta_0+1$ としよう。任意の $g(x)\in H^m(\Gamma)$ に対して $\mathrm{Re}\,p\geqq\mu_0$ で $H^m(\Omega)$-valued function として analytic な $U^{(\delta)}$ は $\mathrm{Re}\,p\geqq-\delta_0$ の範囲にまで analytically に接続される。そして次の評価が成り立つ：

$$
(2.3)\quad |||U^{(\delta)}(p,g;x)|||_m\leqq\frac{C_m}{\mathrm{Re}\,p+\delta_0}\|g\|_m,\quad \forall\,\mathrm{Re}\,p>-\delta_0 .
$$

ただし $\|\cdot\|_m$ は $H^m(\Gamma)$ での、$|||\cdot|||_m$ は $H^m(\Omega)$ での norm を示すものとする。

$C^\infty(\Gamma)$ から $C^\infty(\Gamma)$ への mapping $\mathcal{B}^{(\delta)}(p)$ を次のように定義しよう。 $g \in C^\infty(\Gamma)$ に対し

$$\mathcal{B}^{(\delta)} g = B^{(\delta)}(p) U^{(\delta)}(p, g; x)\big|_\Gamma$$

と定義する。ここで

$$B^{(\delta)}(p) = \sum_{j=1}^{3} b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + p\, c(x) + d + \delta \sum_{j=1}^{3} b_j \cdot \frac{x_j}{|x|}$$

である。今後 $\mathcal{B}^{(\delta)}(p)$ の性質を調べる事が大切である。

<u>定理2.2.</u> 任意の $m \geqq 0$ に対して

$$(2.4) \quad \| \mathcal{B}^{(\delta)}(p) g \|_m \leqq C_m (\| g \|_{m+1} + |p| \| g \|_m)$$

が成り立つ。そして $p = ik + \mu$ とおくと $\mu > -\delta_0$ に対し

$$(2.5) \quad -\mathrm{Re}\, (\mathcal{B}^{(\delta)}(p) g, g)_m \geqq (c_0 \mu - C) \| g \|_m^2 + a \| g \|_m^2 - C_m' \| g \|_{m-1}^2$$

が成り立つ。ここで $c_0 = 1 - \sup c(x)$, C は b_j, c, d に独立な定数で,

$$a = \inf_{x \in \Gamma} \mathrm{Re} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial (b_j - n_j)}{\partial x_j} - d(x) \right\}$$

である。 $d(x)$ が

$$(2.6) \quad a \geqq (c_0 \delta_0 + C + C_0') + 1$$

を満たしていると, $\mathcal{B}^{(\delta)}(p)$ を $H^{m+1}(\Gamma)$ から $H^m(\Gamma)$ への写像

とみなすと $\mathcal{B}^{(\delta)}(p)$ は $H^{m+1}(\Gamma)$ から $H^m(\Gamma)$ への bijection であり　$\mathrm{Re}\, p > -\delta_0$ に対し

(2.7)　$\| \mathcal{B}^{(\delta)}(p)^{-1} g \|_m \leq C''_m \| g \|_m$

(2.8)　$\| \mathcal{B}^{(\delta)}(p)^{-1} g \|_{m+1} \leq C''_m |p| \| g \|_m$

が成り立つ。

この定理を認めると $\mathcal{B}^{(\delta)}(p)$ が $\mathrm{Re}\, p > -\delta_0$ で analytic であることより任意の $f \in H^m(\Gamma)$ に対し

(2.9) $\begin{cases} \mathcal{B}^{(\delta)}(p)^{-1} f \text{ は } H^{m+1}(\Gamma)\text{-valued function として} \\ \mathrm{Re}\, p > -\delta_0 \text{ で analytic である} \end{cases}$

事が $d(x)$ が (2.6) の条件をみたしているとの仮定のもとに成り立つ。

$h(x,t) \in C^\infty(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ かつ $\mathrm{supp}\, h \subset \Gamma \times [0, 2\kappa]$ に対し

$$\hat{h}(x,p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} h(x,t)\,dt$$

とおくと $\hat{h}(x,p)$ は $\mathbb{C}$ 全体で $H^m(\Gamma)$-valued function として analytic となる。さらに

(2.10)　$|p|^j \| \hat{h}(x,p) \|_m \leq (1 + e^{-2\kappa \cdot \mathrm{Re}\, p}) \int_{-\infty}^{\infty} \| \frac{\partial^j}{\partial t^j} h(x,t) \|_m dt$

が成り立つ。

$$(2.11)\qquad v(x,t)=\int_{\mathrm{Re}\,p=\mu} e^{pt}\,U^{(\delta)}(p,\ B^{(\delta)}(p)^{-1}\,e^{-\delta|x|}\hat{h}(\cdot,p)\,;\,x)\,dp$$

ここで $\mu>-\delta_0$，とおく。(2.3) および (2.7) の評価式より

$$(2.12)\qquad |||\,U^{(\delta)}(p,\ B^{(\delta)}(p)^{-1}\,e^{-\delta|x|}\hat{h}(\cdot,p)\,;\,x)\,|||_m$$

$$\leq |p|^{-2-j}\ \frac{C_m}{\delta_0+\mu}\,\|\,p^{2+j}\,\hat{h}(x,p)\,\|_m$$

が成り立つ。さらに $U^{(\delta)}(p,\ B^{(\delta)}(p)^{-1}\ \hat{h}(\cdot,p)\,;\,x)$ は $\mathrm{Re}\,p>-\delta_0$ で $H^m(\Omega)$-valued 函数として analytic になることも注意しておこう。よって (2.11) の右辺は $\mu>-\delta_0$ で収束し

$$|||\,v(x,t)\,|||_{m+1}+|||\,\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\,|||_m$$

$$\leq C_m\,e^{\mu t}\,\frac{e^{-\mu\cdot 2\pi}+1}{\delta_0+\mu}\sum_{j=0}^{1}\int_{-\infty}^{\infty}\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j+2}e^{-\delta|x|}\,h(x,t)\,\|_{m+1-j}\,dt$$

が成り立つ。明らかに $v(x,t)$ は (P_δ) の解である事がわかる。よって (P_0) の解 $w(x,t)$ は

$$w(x,t)=e^{\delta|x|}\,v(x,t)$$

より，

$$(2.13)\qquad |||\,w(x,t)\,|||_{m+1,\Omega_R}+|||\,\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)\,|||_{m,\Omega_R}$$

$$\leq C_m\,e^{\mu t}\cdot e^{\delta R}\,\frac{e^{-2\pi\cdot\mu}+1}{\delta_0+\mu}\sum_{j=0}^{1}\int_{-\infty}^{\infty}\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2+j}h(x,t)\,\|_{m+1-j}\,dt$$

が成り立つ。ここで $|||\cdot|||_{m,\Omega_R}$ は $H^m(\Omega_R)$ の norm を

示すものとする。ここで

$$\sum_{j=0}^{1}\int_{-\infty}^{\infty}\|(\tfrac{\partial}{\partial t})^{j+2}h(x,t)\|_{m+1-j}^{2}\,dt \leq C\{|||\tilde{u}_0|||_{m+1}+|||\tilde{u}_1|||_m\}$$
$$\leq C'\{|||u_0|||_{m+1}+|||u_1|||_m\}$$

を用いると定理1が示される。

§3. 定理2.2の証明方針

定理2.1を証明するのに我々は $f(x,t)=g(x)\,q(t)$ とおき

$$(D_\delta)\begin{cases}(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_\delta)\,v(x,t)=0 & \text{in } \Omega\times\mathbb{R}^1\\ v(x,t)=f(x,t) & \text{on } \Gamma\times\mathbb{R}^1\\ \operatorname{supp} v\subset\bar{\Omega}\times[0,\infty) & \end{cases}$$

の解 $v(x,t)$ の性質を用いた。$q(t)$ として

$$(3.1)\qquad q(t)\neq 0,\qquad \operatorname{supp} q\subset[0,2\rho]$$

となるものをとると

$$(3.2)\qquad |||v(x,t)|||_m \leq C_m\cdot e^{-t\beta}\sum_{l=0}^{1}\int_0^{2\rho}\|(\tfrac{\partial}{\partial t})^l f(x,t)\|_{m+1-l}\,dt$$

なる評価の成り立つ事が Morawetz [10] の考察を用いる事によりわかる。これを用いると我々は $p\in\mathbb{C}$ で $\operatorname{Re} p>-\delta_0$

に対し，$\hat{g}(p) \neq 0$ となる $g(t)$ を (3.1) を満たすようにとる事により

$$(3.3) \quad U^{(\delta)}(p, g, x) = \hat{g}(p)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} v(x,t)\, dt$$

なる表現を得る。

定理2.2を証明するには (3.3) の表現式にある $v(x,t)$ を具体的に構成する事が大切である。これは Γ の Gauss 曲率を strictly positive と仮定した事より [5], [6] の方法を基本として Airy function 等を用いる事により遂行出来る。その結果を用いて $\partial/\partial n \cdot U^{(\delta)}(p, g; x)|_{\Gamma}$ を計算する。

Γ 上の pseudo-differential operator $\mathcal{A}(k) \in S^{1}_{\frac{1}{3},0}(\Gamma)$ があって

$$\left| \left(e^{2\delta|x|} \frac{\partial U^{(\delta)}(p, g; x)}{\partial n}, g \right)_m - \left(\mathcal{A}(k) e^{\delta|x|} g, e^{\delta|x|} g \right)_m \right|$$

$$\leq C_m \| e^{\delta|x|} g \|_m^2, \quad \forall g \in \mathcal{D}(\Gamma), \ \mathrm{Re}\, p > -\delta_0$$

が成り立つ。$\mathcal{A}(k)$ の symbole の具体的な表現が得られているが、いささか煩雑になるので省略させてもらう。$\mathcal{A}(k)$ の symbole の性質より pseudo-differential operator の計算を行う事により

$$(3.4) \quad -\mathrm{Re}\left(\mathcal{A}(k) e^{\delta|x|} g, e^{\delta|x|} g \right)_m$$

$$\geqq ((X_2^* B_{2F} X_2 + c_0 k X_3^* X_3 + X_4^* |D| X_4) e^{\delta|x|} g, e^{\delta|x|} g)_m - C_m \| e^{\delta|x|} g \|_m^2 ,$$

(3.5) $$- \mathrm{Im} (\mathcal{A}(k) e^{\delta|x|} g, e^{\delta|x|} g)_m$$

$$\geqq ((c_0 k X_1^* X_1 + X_2^* \tilde{B}_{2F} X_2) e^{\delta|x|} g, e^{\delta|x|} g)_m$$

$$- C \| e^{\delta|x|} g \|_m^2 - (B_{2F} X_2 e^{\delta|x|} g, e^{\delta|x|} g)_m$$

が成り立つ。ここで

$$X_2^* (B_{2F} + \tilde{B}_{2F}) X_2 \geqq c_0 \cdot k^{2/3} X_2^* X_2$$

$$\sum_{i=1}^{4} X_i^* X_i = I$$

を用いると

(3.6) $$2 |(\mathcal{A}(k) e^{\delta|x|} g, e^{\delta|x|} g)_m| \geqq c_0 \cdot k^{2/3} \| e^{\delta|x|} g \|_m^2 - C_m \| e^{\delta|x|} g \|_m^2$$

が成り立つ。定理2.2は(3.4), (3.5) を用いると示すことが出来る。

定理2 を示すためには

$$\mathcal{N}^{(\delta)}(p) g = \frac{\partial}{\partial n} U^{(\delta)}(p, g; x) \Big|_{\Gamma}$$

とおき, $\mathcal{N}^{(\delta)}(p) + \sigma(s)$ の性質を調べればよい。(3.6)

より $-\delta_0 < \mathrm{Re}\, p \leq 2\mu_0$ とすると $\exists k_0 > 0$ があって $|k| \geq k_0$ ならば $p = ik + \mu$ に対し

$$\|(\mathcal{N}^{(\delta)}(p) + \sigma) g\| \geq \|g\| \qquad \forall g \in C^\infty(\Gamma)$$

が成り立つ事がわかる。一方 $\mathrm{Re}\, p \geq 2\mu_0$ に対しては[6]より $(\mathcal{N}^{(\delta)}(p) + \sigma)^{-1}$ の存在がわかっている。よって

$$-\delta_0 < \mathrm{Re}\, p \leq 2\mu_0 , \qquad |\mathrm{Im}\, p| \leq k_0$$

なる p に対して考察を行えばよい。$\sigma_0 \leq 0$ なる $C^\infty(\Gamma)$ をとると，例えば Mizohata [9] の考察等を用いると

$$(\mathcal{N}^{(\delta)}(p) + \sigma_0) g = 0 \implies g = 0$$

が $\mathrm{Re}\, p \geq 0$ に対して証明出来る。よって

$$\inf_{\|g\|_1 = 1} \|(\mathcal{N}^{(\delta)}(p) + \sigma_0) g\|_0 = J > 0$$

が証明出来るので，$(\mathcal{N}^{(\delta)}(p) + \sigma_0)^{-1}$ の存在及び $\delta_1, \delta_2 > 0$ があって $|\tilde{\sigma}| \leq \delta_2$ に対し

$$-\delta_1 \leq \mathrm{Re}\, p \leq 2\mu_0 , \qquad |\mathrm{Im}\, p| \leq k_0$$

に対し

$$(\mathcal{N}^{(\delta)}(p) + \sigma_0 + \tilde{\sigma})^{-1}$$

の存在を Neumann 級数の方法により示すことが出来る。

このことは定理2の証明された事を示している。

文　献

[1] AgemiR. and Shirota T., On necessary and sufficient condition for L^2-well-posedness of mixed problems for hyperbolic equations I,II, J.Fac.Sci.Hokkaido Univ.,Ser.I 21(1970), 133-151, 22(1972), 137-159.

[2] Balaban T., On the mixed problem for a hyperbolic equation, Mem.Amer.Math.Soc., N°112(1971).

[3] Ikawa M., Remarques sur les problèmes mixtes pour l'équation des ondes, Colloque international du C.N.R.S.,(1972), Astérisque 2 et 3, 217-221.

[4] ———, Sur les problèmes mixtes pour l'équation des ondes, Publ.RIMS Kyoto Univ., 10(1975), 669-690.

[5] ———, Problèmes mixtes pour l'équation des ondes, Publ.RIMS Kyoto Univ., 12(1976), 55-122.

[6] ———, Problèmes mixtes pour l'équation des ondes, to appear.

[7] Kreiss H.O., Initial-boundary value problem for hyperbolic systems, Comm. Pure Appl.Math., 23(1970),277-298.

[8] Miyatake S., Mixed problem for hyperbolic equation of second order, J.Math.Kyoto Univ., 13(1973),435-487.

[9] Mizohata S., Sur l'analyticité de la fonction spectrale de l'opérateur Δ relatif au problème extérieur, Proc.Japan Acad., 39(1963), 352-357.

[10] Morawetz C.S., Exponential decay of solutions of the wave equation, Comm.Pure Appl.Math., 19(1966), 439-444.

[11] Morawetz C.S., Decay for solutions of the exterior problem for the wave equation, Comm. Pure Appl.Math., 28(1975), 229-264.

[12] Sakamoto R., Mixed problems for hyperbolic equation I, J.Math.Kyoto Univ., 10(1970), 349-373.

[13] Tokita T., Exponential decay of solutions for the wave equation in the exterior domain with spherical boundary, J.Math.Kyoto Univ., 12(1972), 413-430.