数理解析研究所講究録
第337巻 1978年 29-40

放物型発展方程式について

阪大 理　　八木 厚志

1. 序文

Banach空間Xにおいて放物型発展方程式

$$(E)\begin{cases} du/dt + A(t)u = f(t), & 0 < t \leq T \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

を考える。ここで、$\{A(t)\}_{0\leq t\leq T}$は稠密な定義域を持つXの線型閉作用素であり、fは$[0,T]$からXへの写像である。放物型であるとは、各tについて、$-A(t)$が解析的半群の生成作用素になっていることである。すなわち、次の条件が満たされているものとする：

(P) $\exists\theta \in (0,\pi/2)$ $\forall t \in [0,T]$

$$\rho(A(t)) \supset \Sigma = \{\lambda \in \mathbf{C}\ ;\ \arg\lambda \in [\theta, 2\pi-\theta]\},$$

$\exists M \geq 0$ $\forall t \in [0,T]$ $\forall \lambda \in \Sigma$

$$\|(\lambda - A(t))^{-1}\| \leq M/(|\lambda|+1) \quad 。$$

この時、以下の性質を持つXの有界作用素族（発展作用素

) $\{U(t,s)\}_{0\leq s\leq t\leq T}$ を構成したい：

i) $U(t,s)$ は (t,s) について強連続。

ii) $U(t,r)U(r,s)=U(t,s)$　　$0\leq s\leq r\leq t\leq T$

$U(s,s)=I$。

iii) $t>s$ について $R(U(t,s))\subset \mathcal{D}(A(t))$ となり、$A(t)U(t,s)$ は (t,s) について、$0\leq s<t\leq T$ で強連続。さらに、

$$\|A(t)U(t,s)\|\leq C/(t-s)\ 。$$

iv) f が連続であれば、(E) の解 $u\in C([0,T];X)\cap C^1((0,T];X)$, $u(0)=u_0$, が存在するとすればそれは必ず

$$u(t)=U(t,0)u_0+\int_0^t U(t,s)f(s)\,ds$$

と表わされる。

V) f が Hölder 連続であれば、任意の $u_0\in X$ について上式で定義される u は (E) の解になる。

2. 既に得られていた結果と新しい結果について

初めは、$\mathcal{D}(A(t))$ が t に依らず一定という条件の下で、発展作用素が構成できるための十分条件が考察されたが、ここでは、一般的な、$\mathcal{D}(A(t))$ が t と共に変化する場合について考察する。過去に得られた十分条件を挙げると、次のようになる：

(1) 1962年　加藤・田辺に依る。

$$^{\exists}N \geq 0 \quad ^{\exists}\rho \in (0,1] \quad ^{\forall}t \in [0,T] \quad ^{\forall}\lambda \in \Sigma$$

$$\| \partial (\lambda - A(t))^{-1} / \partial t \| \leq N / |\lambda|^{\rho} ,$$

$$^{\exists}K \geq 0 \quad ^{\exists}\alpha \in (0,1] \quad ^{\forall}t, s \in [0,T]$$

$$\| dA(t)^{-1}/dt - dA(s)^{-1}/ds \| \leq K |t-s|^{\alpha}$$

(2) 1964年　田辺に依る。

$$^{\exists}N \geq 0 \quad ^{\exists}\rho \in (0,1] \quad ^{\forall}t \in [0,T]$$

$$\| A(t)^{\rho} dA(t)^{-1}/dt \| \leq N / |\lambda|^{\rho}$$

(3) 1976年　講演者に依る。

$$^{\exists}N \geq 0 \quad ^{\exists}\rho \in (0,1] \quad ^{\forall}t \in [0,T] \quad ^{\forall}\lambda \in \Sigma$$

$$\| A(t)(\lambda - A(t))^{-1} dA(t)^{-1}/dt \| \leq N / |\lambda|^{\rho} \quad 。$$

本講演では、新しい条件

(4)

$$^{\exists}N \geq 0 \quad ^{\exists}\rho \in (0,1] \quad ^{\forall}t \in [0,T] \quad ^{\forall}\lambda \in \Sigma$$

$$\| \partial (\lambda - A(t))^{-1} / \partial t \| \leq N / |\lambda|^{\rho} ,$$

$$^{\exists}K \geq 0 \quad ^{\exists}\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1 \leq i \leq k} \quad -1 \leq \alpha_i < \beta_i \leq 1$$

$$^{\forall}t, s \in [0,T] \quad ^{\forall}\lambda \in \Sigma$$

$$\| A(t)(\lambda - A(t))^{-1} dA(t)^{-1}/dt - A(s)(\lambda - A(s))^{-1} dA(s)^{-1}/ds \|$$

$$\leq K \sum_{i=1}^{k} |\lambda|^{\alpha_i} |t-s|^{\beta_i}$$

を紹介したい。これらの4つの条件の間には、次のような関係があることが分かっている。

$$\begin{array}{ccc} (1) & & (2) \\ \cap & & \| \\ (4) & \supset & (3) \end{array}$$

「$(3) \subset (2)$」については、渡辺道昭氏から報告して戴いた。

3. 発展作用素の構成について

仮定(4)の下での発展作用素の構成について、簡単に述べる。加藤・田辺は、Levi の方法を基にして仮定(1),(2)の下で、発展作用素を構成した。今の場合も、そのような方法は可能であると思われるが、ここでは、$A(t)$ の Yosida 近似と積分方程式を使うやり方に従う。このような方法は、$\mathcal{D}(A(t))$ が一定の場合などでの構成方法として、既に知られていた。

自然数 n について、X の有界作用素族 $\{A_n(t)\}_{0 \le t \le T}$ を

$$A_n(t) = A(t)(1 + n^{-1}A(t))^{-1}$$

と定義する。$\{U_n(t, s)\}_{0 \le s \le t \le T}$ を $\{A_n(t)\}_{0 \le t \le T}$ に対応する発展作用素とし、$\{W_n(t, s)\}_{0 \le s < t \le T}$ を

$$W_n(t, s) = A_n(t)U_n(t, s) - A_n(t)\exp(-(t-s)A_n(t))$$

で定義する。

$U_n(t,s)$ 及び $W_n(t,s)$ は、次の積分方程式を満足していることが分かる。

$$U_n(t,s)=\exp(-(t-s)A_n(t))+\int_s^t U_n(t,\tau)P_n(\tau,s)\,d\tau$$

$$W_n(t,s)=R_{1,n}(t,s)+R_{2,n}(t,s)+\int_s^t W_n(t,\tau)P_n(\tau,s)\,d\tau$$

ただし、

$$P_n(t,s)=-(\partial/\partial t+\partial/\partial s)\exp(-(t-s)A_n(t))$$

$$R_{1,n}(t,s)=\int_s^t\{A_n(t)\exp(-(t-\tau)A_n(t))-A_n(\tau)\exp(-(t-\tau)A_n(\tau))\}P_n(\tau,s)\,d\tau$$

$$R_{2,n}(t,s)=\int_s^t A_n(\tau)\exp(-(t-\tau)A_n(\tau))P_n(\tau,s)\,d\tau$$

である。

次に、$n\to\infty$ の時、各積分核 $P_n(t,s)$, $R_{1,n}(t,s)$, $R_{2,n}(t,s)$ は、それぞれある有界作用素 $P(t,s)$, $R_1(t,s)$, $R_2(t,s)$ に有界収束することが分かる。すなわち、n に無関係なある定数 C があって、

$$\|P_n(t,s)\|\leqq C\,(t-s)^{\rho-1}$$

$$\|R_{1,n}(t,s)\|\leqq C\,(t-s)^{2\rho-1}$$

$$\|R_{2,n}(t,s)\|\leqq C\{(t-s)^{\rho-1}+(t-s)^{\delta-1}\},\quad \delta=\min_{1\leqq i\leqq k}\{\beta_i-\alpha_i\}$$

であり、かつ、$n\to\infty$ の時

$P_n(t,s)\to P(t,s)$　　強収束

$R_{1,n}(t,s)\to R_1(t,s)$　　強収束

$R_{2,n}(t,s)\to R_2(t,s)$　　強収束

となることが分かる。

実際、$P_n(t,s)$については、それが次のように積分表示されることから分かる。

$$P_n(t,s) = -(2\pi i)^{-1}\int_\Gamma e^{-\lambda(t-s)}\left(\partial(\lambda - A_n(t))^{-1}/\partial t\right) d\lambda$$

ここで、ΓはΣに含まれ$\infty e^{i\theta}$から$\infty e^{-i\theta}$に至る、滑らかな積分路である。次に、$P_n(t,s)$について上の事実が成り立つという事から、直ちに$R_{1,n}(t,s)$についても成立する事が従う。最後に、$R_{2,n}(t,s)$については少し複雑で、$R_{2,n}(t,s)$を

$$\begin{aligned}
R_{2,n}(t,s) = {} & \int_s^r A_n(\sigma)\exp(-(t-\sigma)A_n(\sigma))P_n(\sigma,s)\,d\sigma \\
& -\int_r^t \exp(-(t-\tau)A_n(\tau))(2\pi i)^{-1}\int_\Gamma e^{-(\tau-s)\lambda}\lambda\left(\partial(\lambda-A_n(\tau))^{-1}/\partial\tau\right) d\lambda\, d\tau \\
& +\int_r^t A_n(\tau)\exp(-(t-\tau)A_n(\tau))\left(dA_n(\tau)^{-1}/d\tau\right)\times \\
& \quad \{A_n(t)\exp(-(\tau-s)A_n(t)) - A_n(\tau)\exp(-(\tau-s)A_n(\tau))\}\,d\tau \\
& +\int_r^t \{A_n(t)\exp(-(t-\tau)A_n(t))\,dA_n(t)^{-1}/dt \\
& \quad - A_n(\tau)\exp(-(t-\tau)A_n(\tau))\,dA_n(\tau)^{-1}/d\tau\}\,A_n(t)\exp(-(\tau-s)A_n(t))\,d\tau \\
& + P_n(t,r)\exp(-(r-s)A_n(t)), \quad r=(t+s)/2
\end{aligned}$$

と分解することによって、評価式と収束性が得られる。

そこで、今得られた$P(t,s)$, $R_1(t,s)$, $R_2(t,s)$を用いて、積分方程式

$$U(t,s) = \exp(-(t-s)A(t)) + \int_s^t U(t,\tau)P(\tau,s)\,d\tau$$

$$W(t,s) = R_1(t,s) + R_2(t,s) + \int_s^t W(t,\tau)P(\tau,s)\,d\tau$$

の解として、$\{U(t,s)\}_{0\le s\le t\le T}$及び$\{W(t,s)\}_{0\le s<t\le T}$を定義

する。$P_n(t,s)$, $R_{1,n}(t,s)$, $R_{2,n}(t,s)$ が $P(t,s)$, $R_1(t,s)$, $R_2(t,s)$ に、それぞれ有界収束することから、$U_n(t,s)$ 及び $W_n(t,s)$ も $U(t,s)$, $W(t,s)$ にそれぞれ有界収束することが示される。

このようにして構成された $\{U(t,s)\}_{0\leqq s\leqq t\leqq T}$ が、実際に、求めるべき発展作用素になっているということが、同時に構成された $\{W(t,s)\}_{0\leqq s<t\leqq T}$ を用いることによって証明される。例えば、定義より、$t>s$ について

$$A(t)(1+n^{-1}A(t))^{-1}U_n(t,s) = W_n(t,s) + A_n(t)\exp(-(t-s)A_n(t))$$

であるが、$n\to\infty$ の時

$$\text{右辺} \longrightarrow W(t,s) + A(t)\exp(-(t-s)A(t)) \qquad \text{強収束}$$

$$(1+n^{-1}A(t))^{-1}U_n(t,s) \longrightarrow U(t,s) \qquad \text{強収束}$$

であることと、$A(t)$ が閉作用素であることから、

$$\mathcal{R}(U(t,s)) \subset \mathcal{D}(A(t))$$

$$A(t)U(t,s) = W(t,s) + A(t)\exp(-(t-s)A(t))$$

を得る。また、$\varepsilon>0$ として

$$U_n(t,s) - U_n(s+\varepsilon,s) = -\int_{s+\varepsilon}^{t} A_n(\tau)U_n(\tau,s)\,d\tau$$

が成り立っているが、

$$\|A_n(t)U_n(t,s)\| \leqq C(t-s)^{-1}$$

かつ、$n\to\infty$ の時

$$A_n(t)U_n(t,s) \longrightarrow A(t)U(t,s) \qquad \text{強収束}$$

であることより

$$U(t,s)-U(s+\varepsilon,s)=-\int_{s+\varepsilon}^{t}A(\tau)U(\tau,s)\,d\tau$$

すなわち、$t>s$ について

$$\partial U(t,s)/\partial t=-A(t)U(t,s)$$

を得る。

4. 応用について。

Ω を、境界が C^{2m} 級である $\mathbb{R}^n$ の有界領域とする。A は、

$$A(x,t,D)=\sum_{|\alpha|\leq 2m}a_\alpha(x,t)D^\alpha, \qquad x\in\bar{\Omega},\ t\in[0,T]$$

$$a_\alpha\in C^{0,1}(\bar{\Omega}\times[0,T]), \quad |\alpha|=2m$$

$$a_\alpha\in \mathcal{B}^{0,1}(\Omega\times[0,T]), \quad |\alpha|<2m$$

であるような微分作用素で、ある $\theta_0\in(0,\pi/2)$ があって、任意の $\theta\in[\theta_0,2\pi-\theta_0]$ について

$$L_\theta(x,t,D_x,D_y)=A(x,t,D_x)-e^{i\theta}D_y^{2m}$$

は $(x,y)\in\Omega\times(-\infty,\infty)$ について楕円型になっているものとする。次に、B_j を

$$B_j(x,t,D)=\sum_{|\beta|\leq m_j}b_{j\beta}(x,t)D^\beta, \qquad j=1,\cdots,m$$

$$b_{j\beta}\in C^{2m-m_j,1}(\bar{\Omega}\times[0,T])$$

であるような微分作用素で、$\{B_j(x,t,D)\}_{1\leq j\leq m}$ は正規境界微分作用素となり、$\theta\in[\theta_0,2\pi-\theta_0]$ について

$$(L_\theta(x,t,D_x,D_y),\{B_j(x,t,D)\}_{1\leq j\leq m},\Omega\times(-\infty,\infty))$$

が補完条件を満足しているようなものとする。

この時、次の放物型方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial u(x,t)/\partial t + A(x,t,D)u(x,t) = f(x,t), & x\in\Omega,\ t\in[0,T] \\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\Omega \\ B_j(x,t,D)u(x,t) = 0, & x\in\partial\Omega,\ t\in[0,T] \end{cases}$$

を $X = L^p(\Omega)$ $(1<p<\infty)$ で解くことを考える。そのために、$\{A(t)\}_{0\le t\le T}$ を

$$\mathcal{D}(A(t)) = \{u\in W_p^{2m}(\Omega)\,;\ B_j(x,t,D)u(x)|_{\partial\Omega} = 0,\ 1\le j\le m\}$$

$$\{A(t)u\}(x) = A(x,t,D)u(x)$$

と定義すると、この $\{A(t)\}_{0\le t\le T}$ は条件(P)及び(3)(従って(2),(4))を満たす。なお、(3)の定数 ρ は

$$\rho = \begin{cases} 1, & {}^{\forall}j \quad (\partial/\partial t)B_j(x,t,D) \equiv 0 \ \text{の場合} \\ \mathrm{Min}\{m_j/2m\,;\ (\partial/\partial t)B_j(x,t,D) \not\equiv 0\}, & {}^{\exists}j \quad (\partial/\partial t)B_j(x,t,D) \not\equiv 0 \end{cases}$$

で与えられる。

係数の t についての滑らかさについて

$$a_\alpha \in \mathcal{B}^{0,1+\alpha}(\Omega\times[0,T])$$

$$b_{j\beta} \in \mathcal{B}^{2m-m_j,1+\alpha}(\overline{\Omega}\times[0,T]), \quad \alpha>0$$

を仮定すれば、上で定義された $\{A(t)\}_{0\le t\le T}$ は条件(1)を満たす。

もう一つ応用例を示す。HをHilbert空間とし、Kを代数的にも位相的にもHの部分空間であるような、Hilbert空間

とする。内積をそれぞれ $(\cdot\,,\cdot)$, $((\cdot\,,\cdot))$ で表わす。$\{a(t;\cdot,\cdot)\}_{0\leq t\leq T}$ は $K\times K$ 上で定義された連続二次型式の族、$\{V(t)\}_{0\leq t\leq T}$ は K の閉部分空間の族であり、次の仮定を満たすものとする：

○ $V(t)$ は H で稠密。

○ K から $V(t)$ 上への射影 $P(t)$, $Q(t)$ で

$$P, Q \in C^{1+\alpha}([0,T]; \mathcal{L}(K,K)), \quad \alpha > 0$$

となるものが存在する。

○ ${}^\forall u, v \in K$ について

$$a(\cdot\,; u, v) \in C^1([0,T]; \mathbf{C})$$

さらに、${}^\exists M \geq 0 \quad {}^\forall t \in [0,T] \quad {}^\forall u, v \in K$

$$|(\partial/\partial t)\, a(t; u, v)| \leq M\|u\|\,\|v\|,$$

$$\lim_{t\to s} \sup_{\substack{\|u\|\leq 1\\ \|v\|\leq 1}} |(\partial/\partial t)\, a(t; u, v) - (\partial/\partial s) a(s; u, v)| = 0.$$

○ ${}^\exists \delta > 0 \quad {}^\forall t \in [0,T] \quad {}^\forall u \in V(t)$

$$\mathrm{Re}\; a(t; u, u) \geq \delta \|u\|^2 .$$

この時、$\{A(t)\}_{0\leq t\leq T}$ を

$$\mathcal{D}(A(t)) = \{u \in V(t) \,;\, {}^\exists f \in H \quad {}^\forall v \in V(t) \quad a(t; u, v) = (f, v)\}$$

$$A(t)\, u = f$$

で定義することにすると、$\{-A(t)\}_{0\leq t\leq T}$ は条件 (P) 及び (4) を満足する。なお、(4) の $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{1\leq i\leq k}$ は今の場合

$\{(\alpha_i,\beta_i)\}_{1\le i\le k}=\{(-1/2,0),(0,\alpha),(1/2,1)\}$

で与えられる。

$(\partial/\partial t)a(t;u,v)$の滑らかさについて

$$^{\exists}M\geqq 0 \quad ^{\exists}\alpha\in(0,1] \quad ^{\forall}t,s\in[0,T] \quad ^{\forall}u,v\in K$$

$$|(\partial/\partial t)a(t;u,v)-(\partial/\partial s)a(s;u,v)|\leqq M|t-s|^{\alpha}\|u\|\|v\|$$

を仮定することにすれば、$\{-A(t)\}_{0\le t\le T}$は条件(1)を満足する。

参考文献

[1] T.Kato and H.Tanabe, *On the abstract evolution equation*, Osaka Math. J., 14 (1962), 107-133.

[2] H.Tanabe, *Note on singular perturbation for abstract differential equations*, Osaka J. Math., 1 (1964), 239-252.

[3] A.Yagi, *On the abstract linear evolution equations in Banach spaces*, J.Math. Soc. Japan, 28 (1976), 290-303.

[4] A.Yagi, *On the abstract evolution equations of parabolic type*, to appear.

[5] S.G.Krein, *Linear Differential Equations in a Banach space*, Moskow, 1967.

[6] H.Tanabe, *Evolution Equations*, Iwanami, Tokyo, 1975.