数理解析研究所講究録
第 337 巻 1978 年 211-221



# 正規定常過程のT－正値性とマルコフ性
## ——Langevin方程式——
## ——揺動散逸定理——

東大 理　岡部靖憲

## §1 序　T－正値性と揺動散逸定理

場の理論よりでてきた概念であるT－正値性について[1]、確率過程論の立場より、その数学的構造を明らかにし、揺動散逸定理の数学的理論を立てることを目的にし、この報告では、その一端を述べることにする。

$\mathbb{X} = (X(t); t \in \mathbb{R})$ を、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された実数値の正規定常過程とし、平均は0で、共分散函数 $R$ は連続とする：

$$R(t-s) = E(X(t)X(s)) \equiv (X(t), X(s)).$$

Hilbert空間 $M$ を、$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の中で、$X(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ すべてによって張られる閉部分空間によって定義し、$M^+$ (resp $M^-$) を、$X(t)$ $(t \geq 0)$ (resp $X(t)$, $t \leq 0$) によって張られる閉部分空間とする。$M^+$は未来、$M^-$は過去を表わす空間である。このとき、$M$上で、unitaryで対称な、時間反転(time-reflection)とよばれる作用素 $T$ が、

$$TX(t) = X(-t)$$

によって定義される。$P_{M^+}$ を、$M$ から $M^+$ への直交射影を表わすものとするとき、$\mathbb{X}$ が $T$-正値性をもつとは、

$$P_{M^+} T P_{M^+} \geq 0$$

が成り立つときをいう。

このことは、$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \xi_1, \cdots, \xi_n \in \mathbb{C}$, $\forall t_1, \cdots, t_n \in [0, \infty)$ に対して、

$$\sum_{j,k=1}^{n} \xi_j R(t_j + t_k) \overline{\xi_k} \geq 0$$

が成り立つことと同値である。

従って、Widder の研究よりもわかることだが、共分散函数 $R$ が、$[0,\infty)$ 上の非負の有界測度 $d\sigma$ によって、

$$R(t) = \int_0^{\infty} e^{-|t|\lambda} d\sigma(\lambda) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表現されることとも同値である（[4]）。

我々の目的は、$T$-正値性をもった $\mathbb{X}$ を支配する運動方程式を求めることであるが、その背景を少し説明する。正数 $\lambda$ に対して、

$$R_\lambda(t) \equiv e^{-|t|\lambda} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

は、$T$-正値性をもった正規定常過程の共分散函数となるが、上の表現式は、$T$-正値性をもつ一般の正規定常過程の共分散函数 $R$ は、

$$R(t) = \sigma(\{0\}) + \int_{(0,\infty)} R_\lambda(t)\, d\sigma(\lambda)$$

と分解されることを意味している。一方、$R_\lambda$ を共分散にもつ正規定常過程 $\mathbb{X}_\lambda$：

$$R_\lambda(t-s) = (X_\lambda(t), X_\lambda(s))$$

は、Ornstein-Uhlenbeckのブラウン運動とよばれ、次のLangevin equationといわれる確率微分方程式によって記述される：

$$\underline{X_\lambda(t)-X_\lambda(s) = -\lambda\int_s^t X_\lambda(u)du + (2\lambda)^{\frac{1}{2}}(B(t)-B(s)) \quad (s<t)}$$

標語的には、

$$\underline{\dot{X}_\lambda(t) = -\lambda X_\lambda(t) + (2\lambda)^{\frac{1}{2}}\dot{B}(t)}$$

我々の最初の目的は、T-正値性をもつ正規定常過程に対して、その運動を支配する方程式として、無限次元のLangevin equation[2]を導入することによって、特徴付けることである。

次の目的は、$X_\lambda$を支配するLangevin方程式において、drift係数、diffusion係数がそれぞれ、$-\lambda$, $(2\lambda)^{\frac{1}{2}}$ $(\lambda>0)$となっているのは、何故か。もう少し、一般に、drift係数を$-\alpha$、diffusion係数を$\beta$ $(\alpha>0, \beta\neq 0)$とする拡散方程式

$$\dot{X}(t) = -\alpha X(t) + \beta\dot{B}(t)$$

に内蔵する性質は何なのか。これに答えるのが、いわゆるEinsteinの関係式とよばれるもので、揺動散逸定理の静的な部分を表わしている。このことを、無限次元のLangevin方程式に対して、又、多次元の正規拡散方程式に対して調べてみる。

前半の目的である、無限次元のLangevin方程式を求め特徴付ける際に、Lax-Phillipsの散乱理論の一端が用いられる。

このことを、さらに追求すると、S−行列が具体的に計算され、Langevin方程式を完全に記述する。さらに、その具現化として、弦の振動方程式が与えられる。一方、もともと、T−正値性は、場のモデルを構成するために導入されたものであったから、我々の場合にも、場の作用素が求められ、Langevin方程式を介して、逆散乱問題と場の作用素との関係がつくものと思われる。これは、最近の、佐藤−三輪−神保氏の研究の一次元のモデルを与えるものと思われる。ただし、相互作用は、それ程強くない（Jacobi行列）。このことに関して、別の機会に報告したいと思う。

## §2. Hamiltonian system

$M^{T+}$ を、$P_{M^{T+}}Y$ $(Y \in M^-)$ によって張られる閉部分空間とする。このとき、

Theorem 2.1. $\exists H$：自己共役作用素 on $M^{T+}$ ∋

(i) 単純スペクトルをもち、$X(0)$ がひとつの generating vector である。

(ii) $R(t) = (e^{-|t|H}X(0), X(0))$.

(iii) $d\sigma(\lambda) = d(E(\lambda)X(0), X(0))$, 但し、$(E(\lambda); \lambda \in \mathbb{R})$ は、$H$ の単位の分解。

M. H. Stone's Theorem を使うことによって、

<u>Theorem 2.2</u>　次の三条件は同値である：

(i)　$\mathbb{X}$は純非決定的

(ii)　$d\sigma(\{0\}) = 0$.

(iii)　$H > 0$.

そこで、我々は、三つ組 $[\mathcal{X}, H, x_0]$ が次の条件を満足するとき、<u>Hamiltonian system</u> という.

(H.1)　$\mathcal{X}$は H-sp.，$x_0 \in \mathcal{X}$.

(H.2)　$H$は正の自己共役作用素で、単純スペクトルをもち、$x_0$がひとつの生成元である.

<u>Theorem 2.3</u>

純非決定的、T-正値性をもつ正規定常過程 $\mathbb{X}$

$$\updownarrow$$

Hamiltonian system $[\mathcal{X}, H, x_0]$

対応は、　$X(0) \longleftrightarrow x_0$

$$R(t) = (e^{-|t|H} x_0, x_0).$$

## §3. 無限次元の Langevin 方程式

$[\mathcal{X}, H, x_0]$ をひとつの Hamiltonian System とする。Theorem 2.3 で対応する正規定常過程 $\mathbb{X}$は純非決定的ゆえ、標準表現が可能で、前向き表現にでてくるブラウン運動を $(B(t); t \in \mathbb{R})$ とする：

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi}^{-1} E(t-s)\, dB(s), \quad E \in L^2((0,\infty))$$

$$\sigma(X(s); s\le t) = \sigma(B(s_2)-B(s_1);\quad s_1<s_2\le t).$$

H-sp $\mathcal{H}$ を、

$$\mathcal{H} = \left\{ Y\in L^2((0,\infty)\times\Omega, d\sigma\times dP);\ \exists f\in L^2((0,\infty)\times\mathbb{R}, d\sigma\times ds) \ni \right.$$
$$\left. Y(\lambda,\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda,s)\,dB(s,\omega) \right\}$$

によって定義する。

<u>Theorem 3.1</u> $\exists\ \Xi = (\xi(t); t\in\mathbb{R}) \ni$

(i) $\xi(t): \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{H}$ bounded linear

(ii) $\xi(0)=0,\quad (\xi(s)x, \xi(t)y) = s\wedge t\cdot(x,y)$

(iii) $\displaystyle\bigvee_{t\in\mathbb{R}} \xi(t)\mathcal{X} = \mathcal{H}.$

<u>Remark 3.1</u> この $\Xi$ は、ブラウン運動 $(B(t); t\in\mathbb{R})$ を用いて表わされる。この $\Xi$ を <u>Operator-valued の Brown 運動</u> とよぶことにする。

この $\Xi$ を用いて、$\mathcal{X}$ より $\mathcal{H}$ への作用素 $\mathcal{X}(t)$ を、

$$\mathcal{X}(t)x \equiv \int_{\mathbb{R}} \xi(ds)\,\chi_{(0,\infty)}(t-s)\sqrt{2H}\,e^{-(t-s)H}x$$

によって定義する。積分は、$\Xi$ に関する確率積分である。$\mathcal{X}(t)$ の集まりを $\mathfrak{X} \equiv (\mathcal{X}(t); t\in\mathbb{R})$ とおくとき、

<u>Theorem 3.2</u>

(i) $\mathfrak{X}$ は定常過程である; 即ち、

$$(\mathcal{X}(s)x, \mathcal{X}(t)y) = (e^{-|t-s|H}x, y).$$

が成り立つ.

(ii) $\mathcal{X}$ は 純非決定的である; $\mathcal{H}^{-}(t) \equiv \bigvee_{s \leq t} \mathcal{X}(s)\mathcal{X}$ とおくとき、$\bigcap_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{H}^{-}(t) = \{0\}$

(iii) $\mathcal{X}$ は マルコフ性をもつ; $\mathcal{H}^{+}(t) \equiv \bigvee_{s \geq t} \mathcal{X}(s)\mathcal{X}$,
$\mathcal{H}^{+/-}(t) \equiv \bigvee \{ P_{\mathcal{H}^{-}(t)} Y ;\ Y \in \mathcal{H}^{+}(t) \}$, $\mathcal{H}(t) \equiv \mathcal{X}(t)\mathcal{X}$
とおくとき、

$$\mathcal{H}^{+/-}(t) = \mathcal{H}(t)$$

もっと詳しく、$P_{\mathcal{H}(t)} \mathcal{X}(t+s) x = \mathcal{X}(t) T_s x \quad (t \in \mathbb{R},\ s > 0).$

(iv) $x_0$ は $\mathcal{X}$ の generating vector である;

$$\bigvee \{ P_{\mathcal{H}(0)} \mathcal{X}(t) x_0 ,\ t \in [0, \infty) \} = \mathcal{H}(0).$$

(v) $\mathcal{X}$ は 次の確率微分方程式の一意解である;

$s < t$, $x \in \mathcal{D}(H)$

$$\mathcal{X}(t)x - \mathcal{X}(s)x = -\int_s^t \mathcal{X}(u) H x \, du + (\xi_t - \xi_s)\sqrt{2H}\, x$$

この方程式を、$[\mathcal{X}, \mathcal{H}, \xi]$- Langevin equation と名付ける。

そこで、我々は、四つ組 $[\mathcal{X}, \mathcal{H}, \mathcal{X}, x_0]$ が Theorem 3.2の (i)～(iv) を満足するとき、定常マルコフ系と よぶことにすると、

Theorem 3.3

$$\begin{array}{c}\text{Hamiltonian system } [\mathcal{X}, H, x_0] \\ \Big\updownarrow \ [\mathcal{X}, \mathcal{H}, \Xi]\text{-Langevin equation} \\ \text{Stationary Markovian system } [\mathcal{X}, \mathcal{H}, \mathfrak{X}, x_0]\end{array}$$

## §4 揺動散逸定理

次の拡散方程式を考えよう.

$$dX(t) = -\alpha X(t)dt + \beta dB(t) \qquad \alpha > 0,\ \beta \neq 0$$

この diffusion の transition probability density $p(t,x,y)$ は、

$$\begin{cases} p(t,x,y) = \dfrac{1}{(2\pi\Lambda(t))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(y-e^{-\alpha t}x,\ \Lambda^{-1}(t)(y-e^{-\alpha t}x))} \\ \Lambda(t) = \dfrac{\beta^2}{2\alpha}(1-e^{-2\alpha t}) \end{cases}$$

従って、

$$p(t,x,y) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{(2\pi\frac{\beta^2}{2\alpha})^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{y^2}{2\frac{\beta^2}{2\alpha}}} = N(0, \frac{\beta^2}{2\alpha})(y)$$

即ち、$p(t,x,y)$ の不変測度が $N(0, \frac{\beta^2}{2\alpha})(y)$ で与えられ、これを正規化即ち、$\frac{\beta^2}{2\alpha} = 1$ としたときが、§1にのべた、Ornstein-Uhlenbeckのブラウン運動を記述するLangevin equationであったと理解される。

もっと、一般に、次の線型の確率微分方程式を考えよう。

$$d\mathfrak{X}(t) = A\cdot\mathfrak{X}(t)dt + B\,dB(t)$$

但し $A$ は $N\times N$-matrix, $B$は $N\times r$-matrix,

$B(t)$は $r$ 次元のブラウン運動

次の完全制御のための条件をいれる.

$$\mathrm{rank}\,[B, AB, A^2B, \cdots; A^{N-1}B] = N$$

このとき、上の diffusion の transition probability density $p(t,x,y)$ は存在し

$$\begin{cases} p(t,x,y) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}(\det\Lambda(t))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(y-e^{tA}x,\, \Lambda^{-1}(t)(y-e^{tA}x))} \\ \Lambda(t) = \displaystyle\int_0^t e^{sA} B\cdot B^* e^{sA^*} ds \end{cases}$$

と表現される。

<u>Theorem 4.1</u> 次の三条件は同値である:

(i) $A$の固有値の実部がすべて負 ( stable )

(ii) $\exists\Lambda$ : pos. definite sym. $\ni$
($\exists_1$)

$$A\Lambda + \Lambda A^* = -B\cdot B^*$$

(iii) $p(t,x,y)$は唯ひとつの不変測度をもち、それは、 $N(0,\Lambda)(y)dy$ で与えられる。

このとき、

$$(*)\quad \begin{cases} p(t,x,y) \xrightarrow[t\to\infty]{} N(0, \Lambda(\infty))(y) \\ \Lambda(\infty) = \displaystyle\int_0^\infty e^{sA} B B^* e^{sA^*} ds \end{cases}$$

<u>Remark 4.1</u>　Theorem 4.1 (ii) の関係式が、<u>Einstein の関係</u>とよばれ、その数学的特徴付けが、(A) である。([5]).

最後に、§3 の Langevin equation に対して見てみよう。

<u>$\dim \mathcal{X} = N < \infty$ のとき.</u>

このときは、$H$ の固有ベクトルを bases にとって、$X(t)$ を座標表現すると、Theo 3.2 (v) の $[\mathcal{X}, \mathcal{H}, \xi]$-Langevin equation は、

$$\underset{\mathbb{R}^N}{d\,\eta(t)} = -\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} \eta(t)\,dt + \mu \cdot dB(t)$$

$$\left(He_n = \lambda_n e_n, \quad \mu_n = \frac{\sqrt{2\lambda_n}}{x_n}, \quad X(0) = \sum_1^N x_n e_n\right)$$

と書ける. これは、初めにのべた特徴の場合で、揺動散逸定理が成り立つ。

<u>$\dim \mathcal{X} = \infty$ のとき.</u>

さらに制限して、$H$ は、固有ベクトル $e_n$ によって決まっているとし、固有値 $\lambda_n$ が $\sum_1^\infty \lambda_n^{-\delta} < \infty \ (\delta > 0)$ を満足していると する。このときは、前と同様に、$[\mathcal{X}, \mathcal{H}, \xi]$-Langevin equation は、

$$\underset{l_2}{d\eta(t)} = -\underset{H}{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}} \eta(t)\,dt + \underset{l_2}{\mu} \cdot dB(t)$$

となる。このとき、

$$\begin{cases} E\left(e^{i(\eta, \eta(t))} \mid \eta(0) = \xi\right) = e^{i(\eta, e^{-tH}\xi) - \frac{1}{2}(\eta, \Lambda(t)\eta)} \\ \qquad \xi, \eta \in l_2 \\ (\Lambda(t))_{mn} = (\lambda_m + \lambda_n)^{-1} \mu_m \mu_n \left(1 - e^{-(\lambda_m + \lambda_n)t}\right) \end{cases}$$

と与えるから、

$$(\Lambda(\infty))_{mn} \equiv \frac{\mu_m \mu_n}{\lambda_m + \lambda_n}$$

とおくことによって、

$$E(e^{i(\eta, \xi(t))} \mid \xi(0) = \xi) \longrightarrow e^{-\frac{1}{2}(\eta, \Lambda(\infty)\eta)}$$

が成り立つ。さらに、

$$H \cdot \Lambda(\infty) + \Lambda(\infty) H = \mu \cdot \mu^*$$

が成り立つ。従って、この意味では、無限次元のときも、揺動散逸定理が成り立つ。

一般のときは Jacobi 行列と関連してくるのだが、別の機会へ報告する。

## 文献


[1] G.C. Hegerfeld. From euclidean to relativistic fields and on the notion of Markov fields, Comm. math. Phys 35 (1974), 155–171

[2]. J. T. Lewis & L.C. Thomas A characterization of regular solutions of a linear stochastic differential equation Zeitschr. für Wahr., 30 (1974), 45–55

[3] 岡部 靖憲 正規定常過程の T–正値性とマルコフ性 — Langevin equation — Sem. on Prob 47 (1977), 他 7 編

[4] L. Streit & T. Hida. On Quantum theory in terms of white noise, Pre-Print.

[5] 堀 淳一 ,"ランジュバン方程式" 岩波(1977) 以上。