数理解析研究所講究録
第 338 巻 1978 年 1-11

Rogersの近似定理の拡張について

富山大 教育　　泉野佐一

1. $B(\mathbb{H})$を可分無限次元Hilbert空間$\mathbb{H}$上の有界線形作用素全体, $\mathcal{M}$はその部分集合とする。$T\in B(\mathbb{H})$に対して, これと$\mathcal{M}$との間の距離$d(T,\mathcal{M})=\inf\{\|T-M\|: M\in\mathcal{M}\}$の評価や$\mathcal{M}$の中でのTの最良近似(作用素)の存在性等を考えるのが作用素の近似問題でありHalmos等による先駆的な研究([6],[7],[9])がある。

$\mathcal{M}$がcompact作用素全体$\mathcal{K}$のときが[9]で, また正値作用素全体$\mathcal{P}$のときが[8],[1]で取り扱われた。$\mathcal{M}$がnormal作用素全体$\mathcal{N}$のときは特に重要と考えられるがこのまゝでは取り扱いにくいのでspectrumに制限をつけ, $\mathcal{N}(\Lambda)=\{N\in\mathcal{N}; \sigma(N)\subset\Lambda\}$($\Lambda$は複素平面上の閉集合)の形で考えられることが多い。実際, 先に挙げた[8]の研究も$\Lambda=$正実数$[0,\infty)$の場合となっている。$\Lambda=(-\infty,\infty)$のとき, つまり$\mathcal{M}$が自己共役作用素全体のときは, $H=(T+T^*)/2$がTの最良近似となることが簡単にわ

かるので殆んど問題はない。

$\mathcal{M}$ が unitary 作用素全体 $\mathcal{U}$, つまり $\mathcal{N}(\Gamma)$ (Γ は単位円) の場合が最近 Rogers [14] により考察され $d(T, \mathcal{U})$ の評価について問題は完全に解決された。即ち,

<u>定理 A.</u> (i) $ind(T)=0 \Rightarrow d(T,\mathcal{U}) = \max\{\|T\|-1,\ 1-m(T)\}$.

(ii) $ind(T)<0 \Rightarrow d(T,\mathcal{U}) = \max\{\|T\|-1,\ 1+m_e(T)\}$.

ここで $ind(T) = \dim\ker(T) - \dim\ker(T^*)$ (ただし $\dim\ker(T) = \dim\ker(T^*) = \infty$ のときは $ind(T)=0$ と定める)。また $m(T) = \inf\{\|Tx\| : x \in H, \|x\|=1\}$, $m_e(T) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_e(|T|)\}$ ($\sigma_e(R)$ は R の essential spectrum) である。この他, $\mathcal{U}$ に関する最良近似の問題についても相当に調べられている。

T と normal 作用素全体 $\mathcal{N}$ の間の距離 $d(T, \mathcal{N})$ については, Holmes の最近の研究があり, [10] において $d(T,\mathcal{N}) = \|T\| > 0$ となる T は antinormal と呼ばれてその性質が調べられているが十分とはいえない。

以上の事情については昨年9月の数理解析研究所での研究会で, 茨城大, 中本さんによりすでに紹介されており, 同氏によるいくつかの改良も行なわれている。

本稿ではこれら Rogers の結果の拡張と, その応用としての $d(T, \mathcal{N})$ の評価ならびに antinormal 作用素の特徴付け等を述べたい。

2. index 0 の作用素による近似.

定理Aを拡張するために次のような作用素の集合:

$\mathcal{Z}(\Lambda)=\{T : \mathrm{ind}(T)=0,\ \sigma(|T|)\subset\Lambda\}$ (Λは$[0,\infty)$の閉区間,または1点)を導入する。たとえば$\mathcal{Z}(\{1\})=\mathcal{U}$となる。定理Aに対応して次のことがいえる。

<u>定理1.</u> $\Lambda=[\alpha,\beta]$のとき

(i) $\mathrm{ind}(T)=0 \Rightarrow d(T,\mathcal{Z}(\Lambda))=\max\{\|T\|-\beta,\ \alpha-m(T)\}$.

(ii) $\mathrm{ind}(T)<0 \Rightarrow d(T,\mathcal{Z}(\Lambda))=\max\{\|T\|-\beta,\ \alpha+m_e(T)\}$.

Λが1点や有界でない区間のときも同様な結果を得る。

定理1の証明(ii)にはGohberg-Krein-Rogersの定理([14], Theorem 1.1)の精密化である次が必要となる。

<u>定理2.</u> $\mathrm{ind}(A)\neq\mathrm{ind}(B) \Rightarrow \|A-B\|_e \geqq m_e(A)+m_e(B)$.

($\|\cdot\|_e$はessentialノルム,つまりCalkin代数の中でのノルム)

<u>証明.</u> Rogersの方法([14], Theorem 2.1の証明)にならってもよいが,次のようなきわめて簡単な証明が中本さんにより見出されました。対偶で証明するため$\|A-B\|_e < m_e(A)+m_e(B)$と仮定する。$m_e(A), m_e(B)>0$としてよい。

$C=\{m_e(A)B+m_e(B)A\}/m_e(A)+m_e(B)$とおくと,$\|A-C\|_e < m_e(A)$, $\|B-C\|_e < m_e(B)$。従ってGohberg-Krein-Rogersの定理から$\mathrm{ind}(A)=\mathrm{ind}(C)=\mathrm{ind}(B)$. q.e.d.

<u>定理1の証明.</u> (i) まず$T=U|T|$と極分解する。$\mathrm{ind}(T)=0$

よりUはunitaryと選べる。$f(t)=\alpha\ (t\leqq\alpha)$, $t\ (\alpha\leqq t\leqq\beta)$, $\beta\ (t\geqq\beta)$と定めたとき，$Z=Uf(|T|)$とおくと$Z\in\mathcal{Z}(\Lambda)$かつ $\|T-Z\|=\|U(|T|-f(|T|))\|=\max\{|t-f(t)|: m(T)\leqq t\leqq\|T\|\}$

$$=\max\{\|T\|-\beta,\ \alpha-m(T)\}.$$

よって$d(T,\mathcal{Z}(\Lambda))\leq\max\{\|T\|-\beta,\ \alpha-m(T)\}$。また逆向きの不等式は三角不等式と$m(T)$の定義よりわかる。

(ii) $\lambda>m_e(T)$に対して$E_\lambda=E([0,\lambda])$とおく。ここで$E(\cdot)$は$|T|$のspectral measure. このとき$\dim E_\lambda\mathcal{H}=\infty$つまり$E_\lambda\sim 1$はよく知られていることである([2], P.185)。$T=W|T|$ (Wはisometryにとれる)をTの極分解とすると$E_\lambda\sim 1-W(1-E_\lambda)W^*$となることから$V_\lambda^*V_\lambda=E_\lambda$, $V_\lambda V_\lambda^*=1-W(1-E_\lambda)W^*$となるpartial isometry V_λがとれる。$U_\lambda=V_\lambda+W(1-E_\lambda)$はunitaryで$T=U_\lambda\{V_\lambda^*TE_\lambda+|T|(1-E_\lambda)\}$となる。そこで$Z_\lambda=U_\lambda\{\alpha E_\lambda+f(|T|)(1-E_\lambda)\}$とおくと$Z_\lambda\in\mathcal{Z}(\Lambda)$で$\|T-Z_\lambda\|\leqq\max\{\|T\|-\beta,\ \lambda+\alpha\}$がわかる。$\lambda\to m_e(T)$ならしめて，$d(T,\mathcal{Z}(\Lambda))\leq\max\{\|T\|-\beta,\ m_e(T)+\alpha\}$を得る。逆の不等式はまず定理2より$\|T-Z\|\geqq m_e(T)+m_e(Z)\geqq m_e(T)+\alpha$, また$\|T-Z\|\geqq\|T\|-\|Z\|\geqq\|T\|-\beta$, これからわかる。q.e.d.

<u>系.</u> $\mathrm{ind}(T)<0\Rightarrow d(T,\mathcal{Z}([0,\infty)))=m_e(T)$.

$\mathcal{Z}(\Lambda)$に関する最良近似の存在については次がいえる。

<u>定理3.</u> $\Lambda=[\alpha,\beta]$のとき，

(i) $\mathrm{ind}(T)=0$ のときTの最良近似は存在する。

(ii) $\mathrm{ind}(T)<0$ のとき，次の(a)，(b)のいずれかが満たされるならばTの最良近似が存在する。

(a) $\|T\|-\beta > m_e(T)+\alpha$.

(b) $E([0, m_e(T)]) \sim 1$.

(iii) $\mathrm{ind}(T)<0$，$\|T\|-\beta \leqq \alpha$，$m_e(T)=0$ のとき，Tの最良近似は存在しない。

証明. (i)，(ii)は定理1の証明よりわかることである。(iii)については次の定理の応用として示される。（Tの最良近似 $Z \in \mathfrak{Z}(\Lambda)$ があるとすれば，$\|T-Z\|=d(T, \mathfrak{Z}(\Lambda))=\max\{\|T\|-\beta, \alpha+m_e(T)\}=\alpha \leqq m(Z)$，従って次の定理の(iii)より $\mathrm{ind}(T)=\mathrm{ind}\{(T-Z)+Z\}=0$，矛盾）。

定理4. 次は同値.

(i) $\mathrm{ind}(T)=0$.

(ii) $T=\lambda U+\mu V$, $\exists\, \lambda, \mu>0$, $\exists$ unitary U, V.

(iii) $T=A+B$, $\exists\, A, B$, $\mathrm{ind}(B)=0$, $\|A\| \leqq m(B)$.

証明. (iii)⇒(i)のみ示したい。$m(B)>0$ としてよい。$|B|$ は可逆となる。$B=V|B|$ を極分解とすると，$\mathrm{ind}(B)=0$ より V は unitary としてよい。$T=B(B^{-1}A+1)$ で $\|B^{-1}A\| \leq \|B^{-1}\|\|A\|=\dfrac{1}{m(B)}$.

$\|A\| \leqq 1$ から $B^{-1}A$ は contraction となり $\ker(B^{-1}A+1)=\ker(B^{-1}A+1)^*$，よって $\mathrm{ind}(B^{-1}A+1)=0$，$\mathrm{ind}(T)=0$.　q.e.d.

3. $d(T,\mathcal{N})$の評価とantinormal作用素の特徴付け.

定理Aと定理1の系より次のことがわかる。

<u>定理5.</u> (i) $\mathrm{ind}(T)=0 \Rightarrow d(T,\mathcal{N}) \leqq \{\|T\|-m(T)\}/2$.

(ii) $\mathrm{ind}(T)<0 \Rightarrow m_e(T) \leqq d(T,\mathcal{N}) \leqq \{\|T\|+m_e(T)\}/2$.

<u>証明.</u> (i)と(ii)の右側の不等式は殆んど同じ方法で証明されるので(ii)だけ取扱うことにする。$\mathrm{ind}(T)<0$とし$\lambda>0$を任意にとる。定理Aより

$$d(T,\mathcal{N}) \leqq \inf_{V\in\mathcal{U}} \|T-\lambda V\| = \lambda \inf_{V\in\mathcal{U}} \|T/\lambda - V\| = \lambda d(T,\mathcal{U})$$

$$= \lambda \max\{\|T\|/\lambda - 1,\ 1+m_e(T)/\lambda\} = \max\{\|T\|-\lambda,\ \lambda+m_e(T)\}$$

$\lambda=\{\|T\|-m_e(T)\}/2$とおいて$d(T,\mathcal{N}) \leqq \{\|T\|+m_e(T)\}/2$.

($\|T\|=m_e(T)$のときも成り立つ). また左側の不等式は$\mathcal{N}\subset\mathcal{Z}=\mathcal{Z}([0,\infty))$と定理1の系からわかる。q.e.d.

なお、中本さんにより$\mathrm{ind}(T)=0$のとき$d(T,\mathcal{N}) \leqq \|T\|/2$なることがすでに報告されている。$S$をsimple shiftとし、$T=S+2$とおくと$\mathrm{ind}(T)=0$, $d(T,\mathcal{N})=1$, $\|T\|=3$, $m(T)=1$より(i)の等号が成り立つ。即ち不等式(i)はbest possibleである。このことは藤井さんより指摘いただいた。

Holmes [10]は作用素Tがantinormal ($d(T,\mathcal{N})=\|T\|$)となるための十分条件として$d(T,\mathcal{U})=\|T\|+1$を示したが、次の定理が示すようにこれは実は同値条件である。

<u>定理6.</u> $\mathrm{ind}(T)<0$のとき、次は同値。

(i) Tは antinormal.

(ii) $\|T\| = m_e(T)$.

(iii) $d(T, \mathcal{U}) = \|T\| + 1$.

(iv) $T = \alpha W(1-K)$, $\exists \alpha > 0$, $\exists$ isometry W, ind $W < 0$,
$\exists$ compact K, $0 \leqq K \leqq 1$.

(v) $\sigma(UT) = \{z : |z| \leqq \|T\|\}$ $\forall U \in \mathcal{U}$.

証明. (i)−(iii)の同値なることは定理A, 定理5の(ii)からわかる。(ii)⇔(iv)については, まず(ii)を仮定すると $\|T\| \geqq \|T\|_e \geqq m_e(T) = \|T\|$ より $\sigma_e(|T|)$が1点だけの集合とわかる。いま $|T| = \|T\|(1-K)$, K compact とおくと $0 \leqq K \leqq 1$。ind $(T) < 0$ より isometry W を選んで $T = W|T|$ と分解できる。これから(iv)がわかる。逆(iv)⇒(ii)は簡単にわかる。

(iv)⇒(v). $\|T\| = \alpha = 1$ としてよい。$|z| < 1$, $U \in \mathcal{U}$を任意にとる。$z \in \sigma(U|T|)$ を示せば十分である。

$$\begin{aligned} \text{ind}\{W^*U^*(UT - z)\} &= \text{ind}\,(1 - K - zW^*U^*) \\ &= \text{ind}\{(1 - zW^*U^*) - K\} = \text{ind}\,(1 - zW^*U^*) = 0. \end{aligned}$$

ここで $1 - zW^*U^*$ が可逆なることと, index は compact perturbation に関して不変なることを用いた。index の加法性から ind $(UT - z) = -\text{ind}\,(W^*U^*) = \text{ind}(W) < 0$。よって $\ker(UT - z)^* \neq (0)$, つまり $\bar{z}$は$(UT)^*$の固有値となる。従って $z \in \sigma(UT)$.

(v)⇒(iii) $U \in \mathcal{U}$を任意にとる。仮定より $-\|T\| \in \sigma(U^*T)$だが

ら $\|T-U\|=\|U^*T-1\| \geqq r(U^*T-1) \geqq \|T\|+1$。 これより $d(T,\mathcal{U})=\|T\|+1$ がわかる。q.e.d.

この定理の条件(v)は中本さんによって見つけられたもので antinormality を spectrum の条件から特徴付けている。

Holmes が $\|T\|=1$ なる antinormal 作用素 T は partial isometry だろうかという問題を提出した。中本さんによりすでに否定的な解答が与えられたが，このことを上の定理を用いて簡単に示すことができる。S を simple shift，$K=\mathrm{diag}\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\}$ として $T=S(1-K)$ とおくと，$\|T\|=1$ また上の定理の(iv)より T は antinormal，しかし明らかに partial isometry ではない。

4. 作用素の分解.

作用素の分解（[3],[13]）を用いて近似問題を精密化することを考えたい。$T=T'\oplus U$ を T の completely non-unitary 部分 T' と，T の unitary 部分 U との直和分解とする．対応する $\mathbb{H}$ の直和分解を $\mathbb{H}'\oplus\mathbb{H}'^{\perp}$，$\mathcal{U}'$ を $\mathbb{H}'$ 上の unitary 作用素全体とする。一般に $d(T,\mathcal{U}) \leqq d(T',\mathcal{U}')$ であるが，この等号の成り立つ場合については次がいえる。（$\mathbb{H}' \neq 0, \mathbb{H}$ とする）

<u>定理 7</u>（藤井）.

(i) $\mathrm{ind}(T)=0 \Rightarrow d(T,\mathcal{U})=d(T',\mathcal{U}')$.

(ii) $\mathrm{ind}(T)<0 \Rightarrow d(T,\mathcal{U})=d(T',\mathcal{U})$なる必要十分な条件は $m_e(T)=m_e(T')$ または $m_e(T')\leq \|T'\|-2$.

証明. (ii)の必要性のみ示したい。$m_e(T)<m_e(T')$, $m_e(T')>\|T'\|-2$ とする。このとき $\|T\|-1=\|T'\oplus U\|-1=\max\{\|T'\|,1\}-1=\max\{\|T'\|-1,0\}<1+m_e(T')$ なること，および定理Aから

$$d(T,\mathcal{U})=\max\{\|T\|-1,\,1+m_e(T)\}<1+m_e(T')$$
$$=\max\{\|T'\|-1,\,1+m_e(T')\}=d(T',\mathcal{U}').\quad q.e.d.$$

こんどは $T=T''\oplus N$ を T の completely non-normal 部分 T'' と normal 部分 N との直和分解とする。(対応する $\mathbb{H}$ の分解を $\mathbb{H}''\oplus\mathbb{H}''^{\perp}$, $\mathbb{H}''\neq 0, \mathbb{H}$ とする). このときやはり $d(T,\mathcal{N})\leq d(T',\mathcal{N}')$ であり，定理5と同様に次がいえる。

定理8. (i) $\mathrm{ind}(T)=0 \Rightarrow d(T,\mathcal{N})\leq\{\|T''\|-m(T'')\}/2$.

(ii) $\mathrm{ind}(T)<0 \Rightarrow d(T,\mathcal{N})\leq\{\|T''\|+m_e(T'')\}/2$.

たとえば $T=\alpha S\oplus 1\in B(\mathbb{H}\oplus\mathbb{H})$ とする ($0<\alpha<1$, S は simple shift). $T''=\alpha S$ であり $d(T,\mathcal{N})=\alpha$ が定理8と定理5からわかる。

文献

[1] T. Ando, T. Sekiguchi and T. Suzuki, Approximation by positive operators, Math. Z., 131 (1973), 273-282.

[2] P. A. Fillmore, J. G. Stampfli and J. P. Williams, On the

essential numerical range, the essential spectrum and a problem of Halmos, Acta Sci. Math., 33 (1972), 179-192.

[3] M. Fujii, M Kajiwara, Y. Kato and F. Kubo, Decompositions of operators in Hilbert spaces, Math. Japon., 21 (1976), 117-120.

[4] R. Nakamoto, Comments on theorems of Izumino, to appear.

[5] I. C. Gohberg and M. G. Krein, The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators, A. M. S. Translation, Series 2, 13 (1960), 185-265.

[6] P. R. Halmos and J. McLaughlin, Partial isometries, Pacif. J. Math., 13 (1963), 585-596.

[7] P. R Halmos, A Hilbert space problem book, Van Nostland, 1967.

[8] ————, Positive approximants of operators, Indiana Univ. Math. J., 21 (1971), 951-960.

[9] R. B. Holmes and B. R. Kripke, Best approximation by compact operators, Indiana Univ. Math. J., 21 (1971), 255 – 263

[10] R. B. Holmes, Best approximation by normal operators,

J. Appr. Theory, 12 (1974), 412–417.

[11] S. Izumino, Inequalities on normal and antinormal operators, to appear in Math. Japon.

[12] ————, Inequalities on operators with index zero, to appear in Math. Japon.

[13] F. Kubo, On algebraically definite operators, Math. Japon., 21 (1976), 23–35.

[14] D. D. Rogers, Approximation by unitary and essentially unitary operators, Acta Sci. Math. Szeged, 39 (1977), 141–151.